ELEMENTA MATHEMATICA

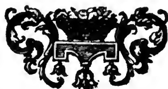
IN QUATUOR TOMOS DIGESTA.

TOMUS TERTIUS

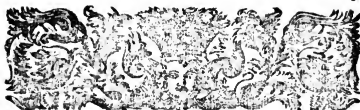
Geometriam ſolidorum continens.

INDEX LIBRORUM
QUOS TOMUS TERTIUS COMPREHENDIT.





2



ELEMENTORUM MATHEMATICORUM
LIBER XI.
De genesi, & sectione solidorum.

A Planis ad solida gradum facimus. Agemus itaque primo de *solidorum sectione*, *&* *genesi*; tum de *sphæræ circulis*; dein de *solidorum ratione*, & *similitudine*; postremo de *eorum dimensione*.

DEFINITIO I.

1. *Solidum*, quod *corpus Mathematicum* etiam dicitur, *est magnitudo, secundum trinam dimensionem, longitudinis scilicet, latitudinis, & profunditatis extensa, una, vel pluribus superficiebus terminata*. In idea *corporis Mathematici* trina tantum dimensio occurrit, ita nimirum, ut quodcunque corpus sensibile veniat sub notione *corporis Mathematici*, si affectionibus omnibus, quæ in ipso sunt, neglectis, trina dumtaxat dimensio in illo concipiatur.

DEFINITIO II.

2. *Angulus solidus est ille, qui continetur tribus ad minimum angulis planis simul penes duo ipsorum latera unitis, atque in idem punctum*, quod Fig. 1. Tab. VII ipsius anguli *apex* dicitur, *desinentibus, quin tamen planam superficiem constituant*. Hujusmodi est angulus productus in A a tribus planis angulis BAD, BAC, CAD simul penes ipsorum latera unitis, atque commune punctum A habentibus, quin ex illorum unione plana superficies consurgat.

COROLLARIUM I.

3. Hinc *anguli plani*, *qui solidum angulum constituunt simul sumti debent*

minores quatuor rectis. Etenim, si secus, plana superficies ex illorum unione haberetur.

COROLLARIUM II.

4. *Duo anguli solidi erunt æquales inter se, si anguli plani, quibus continentur, fuerint numero, & magnitudine æquales, eodemque ordine inter se dispositi*. Hoc enim ipso illorum unus intra alterum positus perfecte ei congruet.

COROLLARIUM III.

5. Viciſſim *æquales anguli solidi planis angulis numero, & magnitudine æqualibus continentur*. Quandoquidem, si secus, anguli ipsi sibi mutuo haudquaquam congruerent; ac proinde contra hypothesim non essent inter se æquales.

DEFINITIO III.

Fig. 2. Tab. VII. 6. *Ex solidis angulis ille vocatur rectus, qui tribus rectis angulis planis comprehenditur*. Sic rectus est solidus angulus productus in puncto C a tribus angulis planis BCD, BCF, DCF, quia quilibet horum trium angulorum est rectus.

COROLLARIUM.

7. *Omnes anguli solidi recti sunt inter se æquales*. Omnes enim continentur angulis planis numero, & magnitudine æqualibus.

DEFINITIO IV.

8. *Angulus solidus obtusus est ille, qui rectum superat. Acutus vero ille, qui a recto deficit*.

DEFINITIO V.

9. Solidum vel planis superficiebus totum clauditur, vel una curva superficie continetur, vel plana simul, & curva superficie comprehenditur. *Extrema igitur solidorum sunt superficies*, quemadmodum extrema planorum sunt lineæ, & extrema linearum sunt puncta.

DEFINITIO VI.

10. Ex corporibus, quæ planis dumtaxat superficiebus terminantur, *illa dicuntur regularia, quæ planis regularibus, atque inter se æqualibus continentur, omnesque ipsorum anguli sunt inter se æquales*. Corpora regularia sunt *Cubus, tetraedrum, octaedrum, dodecaedrum, & icosaedrum*, quibus additur *sphæra*, corpus inter omnia nobilissimum. *Cubus, tetraedrum, octaedrum, dodecaedrum*, & *icosaedrum* corpora Platonica vocari solent, quod illis Plato

in

Timæo quinque corpora simplicia, *cœlum*, videlicet, *ignem*, *aerem*, *aquam*, & *terram*, comparaverit. Cetera vero corpora ab his diversa, quorum infinita plane sunt genera, *irregularia* vocantur.

COROLLARIUM.

11. *Omnes anguli corporis regularis sunt inter se æquales*. Planis namque angulis numero, & magnitudine æqualibus singuli continentur.

DEFINITIO VII.

12. *Pyramis est solidum terminatum pluribus, quam duobus triangulis planis rectilineis; ea ratione simul penes duo qualibet ipsorum latera unitis, ut spatium undique claudant, & eorum bases figuram planam rectilineam*, quæ pyramidis *basis* dicitur, *constituant; omnium vero ipsorum vertites in unum punctum coeant*, quod ipsius pyramidis *apex*, seu *vertex* nuncupatur. Talis est solidum BADC, sicuti etiam solidum EFGH, quorum alterum *pyramis trilatera*, alterum *pyramis quadrilatera* dicitur, quatenus nempe basis BCD prioris figura plana trilatera est, tribusque idcirco triangulis planis pyramis ipsa continetur; basis vero KFGH posterioris est figura plana quadrilatera, ipsaque propterea pyramis quatuor triangulis planis comprehenditur. Porro punctum A, in quo simul coeunt vertices omnium triangulorum pyramidem BADC terminantium, *vertex*, sive *apex* pyramidis BADC vocatur, sicuti etiam punctum E dicitur *vertex*, sive *apex* pyramidis KFGHE. Fig. 1. Fig. 2. Tab. VII

COROLLARIUM.

13. *Quævis pyramis tot triangulis planis rectilineis terminatur, quod latera in ejus basi numerantur*.

DEFINITIO VIII.

14. *Axis pyramidis est recta linea ducta ab illius vertice in centrum basis*. Ut si punctum M fuerit centrum basis FGHK, recta EM erit axis pyramidis KFGHE. Fig. 3. Tab. VII

DEFINITIO IX.

15. *Pyramis dicitur recta, si illius axis ad perpendiculum basi insliterit*, cujusmodi est pyramis KEGH. *Dicitur vero inclinata*, si illius *axis oblique ad basim sese habuerit*.

COROLLARIUM.

16. *Altitudo pyramidis recta diversa non est ab illius axe*. Altitudo namque

cujuslibet figuræ est recta ducta a vertice in basim, eique ad perpendiculum incumbens (*Lib. V.* §. 14.

DEFINITIO X.

17. *Prisma est solidum pluribus planis rectilineis comprehensum, quorum duo ex adverso æqualia sunt, similia, & parallela, reliqua vero sunt parallelogramma.*
Fig. 4. Fig. 5. Tab. 7. Hujusmodi sunt duo solida AF, BH. Quandoquidem in utroque plana ex adverso posita, nimirum ABC, DEF, sicuti etiam ACD, LGH, æqualia sunt, similia, & Parallela, reliqua autem sunt parallegramma.

COROLLARIUM.

18. *Tot parallelogrammis prisma quodcunque clauditur, quot latera sunt in uno planorum sibi ex adverso positorum.*

DEFINITIO XI.

19. Si pro basi prismatis sumatur unum ex illis planis, quæ sibi mutuo in illo adversantur, *illud prisma vocatur rectum, in quo omnia parallelogramma, quibus comprehenditur sunt rectangula.* Rectum videlicet erit prisma AF,
Fig. 4. Tab. 7. quia parallegograma ADEB, BEFC, ADFC sunt rectangula. Hoc enim ipso ad perpendiculum suæ basi incumbit.

COROLLARIUM I.

20. *Tot rectangulis prisma rectum continetur, quot sunt latera in illius basi.*

COROLLARIUM II.

12. *Altitudo prismatis recti est latus unius ex illis rectangulis, quibus comprehenditur.*

DEFINITIO XII.

Fig. 2. Tab. 7. 22. *Parallelepipedum est solidum sex parallelogrammis comprehensum, quorum duo qualibet ex adverso posita, sunt sibi mutuo æqualia, similia, & parallela.* Tale est solidum AF.

COROLLARIUM.

23. *Omne parallelepipedum est prisma, licet non omne prisma sit parallepipedum.* Quandoquidem omne parallelepipedum est hujusmodi, ut duo ipsius plana ex adverso posita, sint æqualia inter se, similia, & parallela, cetera vero sint paparallelogramma. Verum prisma non exigit, quemadmodum parallelepipedum, ut parallelogramma sint omnia plana, quibus comprehenditur.

DE-

DEFINITIO XIII.

24. *Cubus est solidum sex quadratis æqualibus, & quæ ex adverso sunt, sibi mutuo parallelis comprehensum*. Hujusmodi est solidum BG. Fig. 6. Tab. 7.

COROLLARIUM I.

25. *Omnia cubi latera sunt inter se æqualia*. Sunt enim latera quadratorum æqualium.

COROLLARIUM II.

26. *Omnes anguli cubi sunt rectis atque adeo inter se æquales*. Etenim eorum quilibet tribus angulis rectis planis continetur.

COROLLARIUM III.

27. *Cubus est solidum regulare*. Terminatur enim planis regularibus, sibi mutuo æqualibus, & similibus, omnesque ipsius anguli sunt æquales.

COROLLARIUM IV.

28. *Omnis cubus est parallelepipedum, quamvis non omne parallelepipedum sit cubus*. Plana enim, quibus cubus continetur, sunt parallelograma (§.24.) & quidem similia (*Lib. IX.* §. 3.), ex quibus duo quælibet ex adverso sunt parallela, & inter se æqualia, prout parallelepipedum exigit. Verum omnia sunt quadrata, quod ad parallelepipedum non requiritur.

COROLLARIUM V.

29. *Altitudo cubi adæquat latus basis ejusdem*. Est enim latus unius ex illis quadratis, quibus cubus continetur, quæ omnia sunt æqualia.

DEFINITIO XIV.

30. *Conus est solidum, quod circulo, tamquam basi, & curva superficie ex una parte in punctum tota desinente continetur*, seu *conus est solidum, quod determinatur a recta linea circa peripheriam circuli revoluta, dum alterum illius extremum puncto extra illius circuli planum sumpto, interim constanter hæret*. Hujusmodi est solidum BAD circulo BCD, & curva superficie producta a recta AB circa peripheriam ipsius circuli BCD revoluta, fixo manente illius extremo A, comprehensum. Fig. 7. Tab. 7.

DEFINITIO XV.

Fig. 7. Tab. 7. 31. *Basis coni est circulus, cui conus insistit. Apex, seu vertex est punctum, in quod conus ipse desinit. Axis coni est recta ducta ab illius vertice in baseos centrum. Latus vero est quacunque recta linea ducta a vertice coni in peripheriam basis.* Sic basis coni BAD est circulus BCD. Apex punctum A. Axis recta AE. Latus recta AB, sicuti etiam recta AD.

DEFINITIO XVI.

Fig. 7. Tab. 7. 32. Si latera AB, AD coni BAD triangulum æquilaterum cum baseos diametro BD constituant, *conus dicitur æquilaterus*; si constituant triangulum isosceles, *conus* dicitur *isosceles*; *scalenus* vero nuncupatur, si triangulum scalenum hujusmodi rectæ efficiant.

DEFINITIO XVII.

Fig. 7. Tab. 7. Fig. 8. 33. *Ille conus vocatur rectus; cujus axis ad perpendiculum basi incumbit; obliquus vero ille, cujus axis ad basim inclinat.* Rectus nimirum est conus BAD; quia illius axis AE perpendicularis est basis circulo BCD. Obliquus vero conus *bad*; quia illius axis *ae* super baseos circulum *bcd* oblique cadit.

COROLLARIUM

34. *Altitudo coni recti diversa non est ab illius axe.* Altitudo namque coni est recta perpendicularis ducta a vertice in basim.

SCHOLION.

Fig. 7. Tab. 7. 35. Conus rectus concipi potest oriri ex completa revolutione trianguli rectanguli circa alterum ex lateribus, quæ sunt circa angulum rectum, immotum consistens. Sic conus rectus BAD habetur ex revolutione trianguli rectanguli BEA circa quiescens latus AE, ita nimirum, ut conica superficies determinetur a rotante hypotenusa AB, & baseos circulus BCD ex revolutione lateris BE.

DEFINITIO XVIII.

Fig. 9. Tab. 7. 36. *Cylindrus est solidum duobus circulis æqualibus, & parallelis, & curva superficie in illorum peripherias desinente comprehensum.* Tale est solidum AD terminatum duobus circulis AB, CD æqualibus, & parallelis, curvaque superficie ACDB desinente in ipsorum circulorum peripherias, quæ proinde concipi potest veluti genita ex tali motu rectæ lineæ AC circa peripherias circulorum AB, CD, ut sibi semper parallela existat.

DE-

DEFINITIO XIX.

37. *Basis cylindri est circulus, cui ille incumbit. Axis est recta linea conjungens centra circulorum, quibus cylindrus terminatur. Latus vero est recta axi parallela, utriusque circuli peripheriam tangens.* Sic basis cylindri AD est circulus CD. Axis recta EF. Latus vero tam recta AC, quam recta BD.

DEFINITIO XX.

38. *Cylindrus rectus est ille, cuius axis perpendicularis est circulo baseos. Obliquus vero, cuius axis in circulum baseos oblique cadit.* Rectus videlicet est cylindrus AD, obliquus vero cylindrus *ad*; quia axis EF ad perpendiculum insistit basi CD, non sic autem *ef* basi *cd*. Fig. 9. Fig. 10. Tab. 7.

COROLLARIUM.

39. *Altitudo cylindri recti ab illius axe diversa non est.*

SCHOLION.

40. Oritur cylindrus rectus ex completa revolutione rectanguli circa unum ex suis lateribus plane immobile. Videlicet cylindrus rectus AD oritur ex revolutione rectanguli AEFC circa latus EF omnino quiescens, ita nimirum ut ex revolutione laterum AE, CF emergant circuli AB, CD, quibus cylindrus terminatur, & ex revolutione lateris AC cylindrica superficies ACDB. Fig. 9. Tab. 7.

DEFINITIO XXI.

41. *Tetrahedrum est solidum quatuor triangulis planis rectilineis regularibus, & inter se aequalibus terminatum*, cujusmodi est solidum ACB. Fig 11. Tab. 7.

DEFINITIO XXII.

42. *Octaedrum est solidum octo triangulis rectilineis regularibus, & inter se aequalibus comprehensum*, ut solidum DEF. Fig 12. Tab. 7.

DEFINITIO XXIII.

43. *Dodecaedrum est solidum, quod duodecim pentagonis aequalibus, & regularibus continetur*, ut solidum GHK. Fig. 13. Tab. 7.

DEFINITIO XXIV.

44. *Icosaedrum est solidum viginti triangulis regularibus, atque inter se aequalibus terminatum*, ut solidum LMN. Fig. 14. Tab. 7.

DE-

DEFINITIO XXV.

45. *Polyedrum est solidum pluribus figuris planis rectilineis comprehensum.* Est enim polyedrum in genere solidorum, quod polygonum in genere planorum.

DEFINITIO XXVI.

Fig. 15. Tab. 7. 46. *Sphæra est solidum una tantum curva superficie comprehensum, in cujus solidi area punctum est, a quo omnes rectæ lineæ ductæ in illam curvam superficiem sunt inter se æquales.* Tale est solidum ABCD curva superficie undique terminatum; æquales namque sunt rectæ lineæ EG, EF, omnesque aliæ, quæ a puncto E in superficiem ABCD cadere possunt.

Genesis sphæræ.

47. Sphæra producitur a semicirculo rotante circa quiescentem diametrum,
Fig. 16. Tab. 7. integramque revolutionem complente. Sic sphæra ABCD oritur ex completa revolutione semicirculi BAD circa quiescentem diametrum BD. Hinc sphæra definitur ab Euclide lib. XI. Elementorum, *eum semicirculi manente diametro, semircirculus circumductus in idem revolvitur, unde capit circumduci.*

COROLLARIUM I.

48. Cum semicirculus BAD ex tot concentricis semiperipherils circularibus consurgat, quot in illius radio BE, centro excepto, puncta numerantur (*Lib.* X. §. 48.), *soliditas sphæræ ABCD concipi potest veluti consurgens ex tot sphæricis superficiebus sibi mutuo concentricis, quot sunt puncta, excepto centro, in radio BE semicirculi genitoris BAD, atque adeo etiam ipsius sphæræ.* Quælibet enim ex illis semiperipheriis, quæ semicirculi genitoris aream constituunt, in illa circa diametrum BD revolutione sphæricam superficiem producit.

COROLLARIUM II.

49. Quemadmodum soliditas sphæræ ABCD oritur ex completa revolutione semicirculi BAD circa diametrum immobilem BD, *ita ejus sphæræ superficies nascitur ex completa revolutione semiperipheriæ BAD circa eandem diametrum BD.*

SCHOLION.

50. Mensura rotationis semicirculi BAD circa immotam diametrum BD, unde efficitur sphæra ABCD, est peripheria circuli per centrum ipsius sphæræ transeuntis, atque adeo in illa maximi. Hujusce enim circuli periphe-

ria,

ria, cum sit major peripheriis omnium aliorum circulorum ipsius sphæræ, Fig.15.
certa hoc ipso, & immutabilis est apud omnes, prout ad mensuram requi Tab.7.
ritur.

DEFINITIO XXVII.

51. *Centrum sphæræ est punctum sumtum in illius area, a quo omnes rectæ lineæ ductæ in sphæræ superficiem, sunt inter se æquales.* Ut si omnes rectæ lineæ, quæ a puncto E sphæræ ABCD cadunt in illius superficiem, fuerint inter se æquales, punctum E erit centrum ipsius sphæræ ABCD.

COROLLARIUM I.

52. *Centrum sphæræ est punctum in illius medio existens.* Ab illo enim singula sphæricæ superficiei puncta æqualiter distant.

COROLLARIUM II.

53. Hinc *planum per sphæræ centrum transiens sphæram ipsam bifariam dividit.*

DEFINITIO XXVIII.

54. *Diameter sphæræ est recta quæcunque linea transiens per centrum sphæ- Fig.15.
ræ, & utrinque ad illius superficiem terminata.* Sic recta BD est diameter Tab.7.
sphæræ ABCD.

DEFINITIO XXIX.

55. *Radius sphæræ,* qui illius etiam *semidiameter* dicitur, *est qualibet recta linea a sphæræ centro in illius superficiem ducta*, ut recta EG, EF in sphæra ABCD.

COROLLARIUM I.

56. *Omnes eiusdem sphæræ radii sunt inter se æquales.* Omnes enim illæ rectæ lineæ sunt æquales inter se, quæ a centro in superficiem cadunt (§. 51.)

COROLLARIUM II.

57. *Omnes diametri eiusdem sphæræ sunt æquales.* Sunt enim inter se, ut radii (*Lib. I. §.* 127.)

COROLLARIUM III.

58. *Diameter semicirculi genitoris est etiam diameter sphæræ, atque adeo etiam radius eiusdem semicirculi est radius ipsius sphæræ.*

DE-

DEFINITIO XXX.

59. *Hemisphærium est solidum dimidiata sphæræ superficie, & plano per illius centrum ducto comprehensum.* Planum quippe, quod per sphæræ centrum transit, sphæram ipsam bifariam dividit (§. 53.).

Genesis hemisphærii.

60. Oritur hemisphærium ex quadrante circuli revoluto circa radium. Ut enim sphæra a rotante semicirculo circa diametrum, ita hemisphærium a rotante quadrante circa radium fiat necesse est.

DEFINITIO XXXI.

61. *Sector sphæræ est solidum comprehensum sub circulari portione superficiei sphæricæ, & sub curva superficie, quæ initium sumens a curva linea circularem superficiei sphæricæ portionem terminante, in ipsius sphæræ centrum desinit.*

Genesis sectoris sphærici.

62. Ut notio sectoris sphærici clarior fiat, illius genesis consideranda est. Producitur itaque sector sphæricus ex completa revolutione sectoris circularis, quemadmodum hemisphærium ex revolutione quadrantis circa quiescentem ejusdem radium.

COROLLARIUM I.

63. Cum area sectoris circuli ex tot arcubus similibus, sibique mutuo concentricis consurgat, quot, centro excepto, sunt puncta in illius radio (*Lib. X. §. 49*), *sector sphæricus spectari potest veluti compositus ex tot portionibus circularibus superficierum sphæricarum sibi mutuo concentricarum, atque centrum versus continuo decrescentibus, quot, excepto centro, habentur puncta in illius radio.* In illa namque revolutione sectoris circularis quilibet arcus circuli sectorem ipsum constituens, circularem sphæricæ superficiei portionem producit.

COROLLARIUM II.

64. *Portiones circulares superficierum sphæricarum, quæ sphæræ sectorem constituunt, sunt sibi mutuo similes, eandem scilicet proportionem habent omnes ad integram superficiem sphæricam, cujus earum quælibet est portio.* Similes namque sunt arcus genitores, omnesque hujusmodi sphæricarum superficierum portiones eadem revolutione, qua ipsæ itidem integræ superficies fiunt, producuntur.

DE-

DEFINITIO XXXII.

65. *Segmentum sphæræ est ipsius sphæræ portio, plano sphæram ipsam extra centrum dividente, & parte superficiei ipsius sphæræ comprehensa*. Segmenta nimirum sphæræ ABCD sunt duæ ipsius portiones HAM, HCM, quarum altera sub plano HM extra centrum ipsius sphæræ traducto, & sub portione HAM superficiei sphæricæ ABCD, altera sub eodem plano, & sub portione HCM ejusdem superficiei continetur. Fig. 15. Tab. 7.

COROLLARIUM.

66. Cum planum per sphæræ centrum transiens sphæram ipsam bifariam dividat (§. 53.), *illud sphæræ segmentum erit maius, in quo sphæræ centrum reperitur*.

Genesi segmenti sphærici.

67. Sphæræ segmentum producitur a semisegmento circulari revoluto circa radium, qui bifariam, atque adeo ad angulos rectos, chordam arcus totius segmenti circularis, totumque ipsum arcum dividat. Segmentum scilicet sphæricum HCM gignitur ex revolutione semisegmenti circularis MXC circa radium EC bifariam, atque ad rectos angulos dividentem tum chordam HM totius arcus HCM, tum ipsum arcum. Fig. 15. Tab. 7.

DEFINITIO XXXIII.

68. *Illæ rectæ lineæ æqualiter a sphæræ centro distare dicuntur, in quas rectæ perpendiculares inter se æquales cadunt a centro ipsius sphæræ. Illa vero dicitur a centro sphæræ magis distare, in quam cadit major recta perpendicularis ab illius centro*. Memoria repetantur, quæ de hujusmodi lineis in circulo.

DEFINITIO XXXIV.

69. *Sectio solidi dicitur illa figura plana, quæ, facta sectione ipsius solidi ope plani, in ejus partibus divisis de nuovo conspicitur*. Sic figura *abc* est sectio pyramidis BAD divisæ a plano per puncta *a*, *b*, *c* traducto. Fig. 1. Tab. 7.

LEMMA I.

Cylindrus est prisma infinitorum laterum.

70. Esto cylindrus ACDB. Dico, ipsum non differre a prismate infinitis parallelogrammis latitudinis infinite parvæ comprehensum.

De-

Demonstratio.

Spectetur prisma AGH. Manifestum est, prisma AGH ad cylindrum magis accedere, & fieri cylindro simile, quo magis multiplicantur latera baseos FGHL, eodem manente perimetro, atque adeo, quo plura sunt parallelogramma, quibus ipsum prisma comprehenditur, ita nimirum ut, si numero infinita sint latera in basi polygona FGHKL, eaque propterea infinite parva, & infinita idcirco sint parallelogramma, quibus ipsum prisma terminatur, hujusmodi prisma nullatenus discerni possit a cylindro, quemadmodum basis ipsius prismatis tunc a circulo haudquaquam dinstinguitur (*Lib. IX.* §. 149.) Ergo cylindrus quoque spectari potest veluti prisma infinitis parallelogrammis comprehensum.

Fig. 9. Fig. 5 Tab. 7.

COROLLARIUM.

71. *Cylindrica idcirco superficies componitur ex infinitis parallelogrammis latitudinis infinite parvæ, penes duo ipsorum latera simul unitis.*

LEMMA II.

Conus est pyramis infinitorum laterum.

72. Spectetur conus BAD: Dico, ipsum non esse diversum a pyramide infinitis triangulis basim infinite parvam habentibus terminata.

Demonstratio.

Eadem est cum præcedenti. Constat enim, pyramidem eo magis ad conum accedere, quo plura sunt latera baseos, eodem manente perimetro; ac proinde quo magis multiplicantur triangula, quibus pyramis continetur, ita nimirum, ut si latera baseos sint infinita, ac per consequens magnitudinis infinitæ parvæ, ipsaque idcirco pyramis infinitis triangulis basim infinite parvam habentibus comprehendatur, pyramis hujusmodi a cono discerni nullo modo queat. Ergo conus quicunque considerari, ac sumi potest veluti pyramis infinitis triangulis basim infinite parvam habentibus comprehensa.

Fig. 7. Tab. 7.

COROLLARIUM.

73. *Superficies conica consurgit ex infinitis triangulis basim habentibus infinite parvam, simul penes latera unitis, atque in unum commune punctum desinentibus, quod est coni vertex.*

THEO-

THEOREMA L.

Sectiones prismatis basi parallelæ sunt basi similes, & æquales.

74. Prisma AFH secetur plano parellelo basi FGHKL sitque *abcde* illius sectio. Dico, hanc esse similem, & æqualem basi FGHKL. Fig. 5. Tab. 7.

Demonstratio.

Cum enim mutua sectio duorum planorum sit recta linea (*Lib. VIII. §. 24.*) tot rectis continebitur sectio *abcde*, quot planis comprehenditur prisma AFH, atque adeo quot rectis lineis illius basis terminatur (§. 18.) Rursus cum rectæ GH, *cd* sint parallelæ (*Ibidem §. 26.*), ob parallelismum scilicet sectionis *abcde*, & basis FGHKL, ipsæque rectæ GH, *cd* inter latera parallela DH, CG contineantur (*Lib. VI. §. 8.*), duæ rectæ GH, *cd* erunt inter se æquales (*Ibidem §. 20.*), sicuti eandem ob causam etiam duæ FG, *bc*, nec non duæ FL, *ba*, duæ quoque LK, *ae*, & etiam duæ KH, *ed*. Igitur duæ figuræ planæ FGHKL, *abcde* sunt inter se mutuo æquilateræ. Porro cum rectæ FH, *bd* æquales sint inter se, & parallelæ, eadem scilicet ratione, qua ut modo vidimus, æquales sunt, & parallelæ duæ GH, *cd*, duo triangula FGH, *bcd* habebunt latera æqualia, alterum alteri, sicuti etiam bases. Ergo anguli quoque FGH, *bcd*, qui æqualibus lateribus continentur, æquales erunt (*Lib. V. §. 82.*) Eodem modo ostendam, æquales esse etiam angulos GFL, *cba*, sicuti etiam angulos FLK, *bae*, angulos quoque LKH *aed*, nec non angulos KHG, *edc*. Igitur duæ figuræ planæ FGHKL, *abcde* sunt inter se mutuo non tantum æquilateræ, verum etiam æquiangulæ; ac proinde sibi mutuo similes (*Lib. IX §. 2.*), & æquales (*Lib. V. §. 37.*). Sectiones itaque prismatis &c., quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

75. Si prisma trilateram basim habeat, ut prisma AEF, ostenso, sectionem basi parallelam *abc* æquilateram esse ipsi basi, patet, eam esse eidem basi æqualem (*Ibidem §. 84.*) atque æquales cum illa angulos habere, alterum alteri (*Ibidem §. 85.*) ac proinde illi esse omnino similem (*Lib. IX. §. 66.*) Fig. 4. Tab. 7.

COROLLARIUM II.

Si prisma secetur plano basi parallelo, ejus segmenta erunt prismata.

76. Ut si prisma AE secetur plano *abc* basi DEF parallelo, utrumque segmentum A*b*, *a*F erit prisma. Commune siquidem planum *abc* simile & æquale est planis ABC, DEF, ipsisque per hypothesim est parallelum. Fig. 4. Tab. 7.

Co-

Corollarium II.

Elementa prismatis sunt omnia sibi mutuo similia, & inter se æqualia.

77. Elementa siquidem prismatis sunt planæ superficies, quæ sectionibus basi parallelis determinantur. Hæc autem sunt omnes sibi mutuo similes, & inter se æquales (§. 74.), Ergo &c.

Genesis prismatis.

78. Oritur propterea prisma quodcunque ex parallela elevatione figuræ
Fig. 4. planæ rectilineæ, itaut illius centrum rectam lineam in hujusmodi motu
Fig. 5. describat, ipsaque figura eadem semper maneat. Videlicet prisma AEF con-
Tab. 7. surgit ex parallela elevatione trianguli DEF, & prisma BGH ex parallela elevatione pentagoni FGHKL, quam elevationem metitur geniti prismatis altitudo.

Corollarium I.

79. *Hinc prisma quodcunque componitur ex tot planis superficiebus sibi superimpositis, basi similibus, & æqualibus, nec non ipsi basi, sibique mutuo parallelis, quot in illius altitudine puncta numerantur.* Etenim in parallela plani genitoris elevatione, ex qua prisma consurgit, toties sumitur ipsum planum, quot sunt puncta geniti in altitudine ipsius prismatis.

Corollarium II.

80. *Considerari idcirco potest prisma quodcunque, veluti factum ex ductu basis in illius altitudinem.* Genitor siquidem planum a prismatis basi diversum non est.

Theorema II.

Sectiones cylindri basi parallelæ sunt circuli circulo basis æquales.

81. Cylindrus AD secetur plano basi CD parallelo, sitque MN illius sectio. Dico, hanc esse circulum circulo basis CD æqualem.

Demonstratio.

Cylindrus AD est prisma infinitorum laterum (§. 70.). Omnes autem sectiones prismatis basi parallelæ sunt ipsi basi similes, & æquales (§. 74.). Ergo
Tab. 7. sectio quoque MN cylindri AD similis, & æqualis erit basi CD. Hæc autem
Fig. 9. est circulus (§. 37.). Ergo circulus quoque erit sectio MN, & quidem circulo

culo CD baseos æqualis. Sectiones itaque cylindri &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Si cylindrus secetur plano basi parallelo, utrumque illius segmentum erit cylindrus.

82. Segmenta nimirum AN, NC cylindri AD secti plano MN basi CD parallelo, erunt cylindri. Sectio namque MN est circulus circulo basis CD æqualis, & per hyphotesim utrique circulo AB, CD parallelo. Fig. 9. Tab. 9

Corollarium II.

Elementa cylindri sunt circuli circulo basis æquales

83. Elementa namque cylindri determinantur sectionibus basi parallelis.

Genesis cylindri.

84. Cylindrus consurgit ex parallela elevatione circuli, ea quidem lege, ut centrum circuli genitoris rectam lineam in hujusmodi motu describat, ipse vero circulus neque augeatur, neque decrescat. Ut si circulus CD ita moveri concipiatur ab F in E, ut sibi semper sit parallelus, ejusque centrum F rectam FE describat, cylindrus fiet AD. Hanc porro elevationem circuli genitoris metitur ipsius cylindri altitudo. Fig. 9. Tab. 7.

Corollarium I.

85. *Cylindrus propterea componitur ex tot circulis circulo basis æqualibus, eique, nec non inter se mutuo parallelis, quot sunt puncta in illius altitudine.*

Corollarium II.

86. *Quamobrem cylindrus quicunque spectari potest, veluti factum ex multiplicatione circuli baseos per altitudinem.*

Hypothesis.

87. Si ergo altitudo prismatis, aut cylindri ponatur $=a$, ejusque basis $=bd$, soliditas prismatis, & cylindri erit $=abd$. Etenim abd exprimit factum, quod nascitur multiplicando quantitatem bd per quantitatem a.

THEOREMA III.

Sectiones pyramidis basi parallelæ sunt similes ipsi basi.

88. Pyramis ABD secetur plano basi BCDE parallelo, sitque *bcde* illius sectio. Dico, hanc esse similem basi BCDE.

Demonstratio.

Cum enim pyramis ABD tot planis contineatur, quot sunt latera basis
Fig. 17. Tab. 7. BCDE (§. 13.), & sectio duorum planorum sit recta linea (*Lib VIII. §* 24.), tot rectis terminabitur sectio *bcde*, quot rectis continetur basis BCDE. Rursus cum planum secans sit parallelum basi, rectæ DE, *de* erunt parallelæ, sicuti etiam rectæ CD, *cd* (§. 16.). Erit ergo DE ad *de*, & CD ad *cd*, ut AD ad A*d* (*Lib. IX §.* 59.); ac proinde DE. *de* = CD. *cd* (*Lib.* 1. § 76.), & *alternando de. cd* = DE. CD (§ 125.). Eodem modo ostendam, esse *dc. cb* = DC. CB. & *cb. be* = CB. BE, nec non *be. ed* = BE. ED. Ductis porro rectis *ce*, CE, cum plana BCDE, *bcde* sint parallela, ipsæque rectæ *ce*, CE, in eodem plano consistant ACE, erunt inter se parallelæ; cumque recta CE sit basis trianguli CAE, & recta *ce* duo ipsius latera dividat AC, AE, erit CE. *ce* = AC. A*c* (*Lib. IX. §.* 59.), adeoque CD. *cd* = CE. *ce*, cum sit etiam CD. *cd* = AC. *ac*. Quamobrem erit quoque *dc. ce* = DC. CE (*Lib. I. §.* 125.). Duo igitur triangula CED, *ced* habent latera sibi mutuo proportionalia, suntque propterea æquiangula (*Lib IX §.* 70.), angulus nimirum *cde* æqualis est angulo CDE, qui proportionalibus lateribus continentur. Eodem modo demonstrabitur angulus *bcd* æqualis angulo BCD, angulus *ebc* angulo EBC, & angulus *bed* angulo BED. Duo itaque plana BCDE, *bcde* sunt inter se mutuo æquiangula, habentque latera circa æquales angulos proportionalia. Ergo sunt sibi mutuo similia (§. 1.). Sectiones igitur pyramidis &c. quod erat ostendendum.

SCHOLION.

89. Si pyramis sit trilatera, ut ABCD, ex eo tantum patet, sectionem
Fig. 1. Tab. 7. *abc* basi BCD parallelam, similem esse ipsi basi, quod tria latera trianguli *abc* proportionalia sint tribus lateribus trianguli BCD (*Lib. IX. §.* 71.).

COROLLARIUM.

Omnia elementa pyramidis sunt basi similia.

90. Determinantur enim sectionibus basi parallelis.

THEO.

THEOREMA IV.

Sectiones coni basi parallelæ sunt circuli.

91. Conus BAD secetur plano basi BCD parallelo, sitque MN illius sectio. Dico, hanc esse circulum.

Demonstratio.

Cum enim conus sit pyramis infinitorum laterum (*Lib. IX §.* 72.), sectio MN coni BAD basi BCD parallela, erit similis ipsi basi BCD (§. 88.). Hæc autem est circulus (§. 31.). Ergo circulus quoque erit sectio MN. Itaque sectiones &c. quod erat ostendendum. Fig. 9. Tab. 7.

COROLLARIUM.

Coni elementa sunt circuli.

92. Elementa siquidem coni determinantur sectionibus basi parallelis.

THEOREMA V.

Sectiones pyramidis basi parallelæ decrescunt in ratione duplicata imminutæ altitudinis.

93. Duo plana FGHK, MNPQ sint sectiones pyramidis ABD parallelæ illius basi BCDE, adeoque etiam inter se. Altitudo vero ipsius pyramidis sit recta Ae. Dico, sectiones hujusmodi decrescere in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis, videlicet sectionem FGHK esse ad sectionem MNPQ in ratione *duplicata* altitudinis Ac ad altitudinem Aa. Fig. 8. Tab. 7.

Casus I.

Cadat primo altitudo Ae ipsius pyramidis intra illius basim.

Demonstratio.

Secetur pyramis ipsa plano $Aezx$, in quo ipsius altitudo reperiatur i sitque ab sectio plani MNPQ, cd sectio plani FGHK, & Af sectio plan ADE. Cum igitur mutua duorum planorum sectio sit recta linea (*Lib. VIII §.* 24.), & plana FGHK, MNPQ sint per hypothesim inter se parallela, parallelæ erunt rectæ cd, ab (§. 26.), sicuti etiam rectæ HK. PQ. Quamobrem erit $Ad.\ Ab = AH.\ AP$ (*Lib. IX. §.* 57.). Est autem eandem ob causam $Ac.\ Aa = Ad.\ Ab$: Ergo erit quoque $Ac.\ Aa = AH.\ AP$.

Conſtat porro, eſſe HK. PQ = AH. AP (§. 59.). Ergo erit ſimiliter Ac. Aa = HK. PQ (*Lib. I. §. 76.*). Manifeſtum porro eſt, duo plana FGHK, MNPQ eſſe inter ſe in ratione *duplicata* laterum HK, PQ (*Lib. IX. §.* 170.); cum ipſa plana ſint ſimilia, eorumque latera homologa ſint duo HK, PQ. Ergo planum FGHK erit ad planum MNPQ in ratione quoque *duplicata* altitudinis Ac ad altitudinem Aa.

Caſus II.

Fig. 19. Tab. 7. Modo altitudo pyramidis ABD ſit in uno ipſius plano triangulari ADE, nimirum altitudo ſit recta Af. Dico, ſectionem FGHK eſſe ad ſectionem MNPQ in ratione *duplicata* altitudinis Ad ad altitudinem Ab.

Demonſtratio.

Etenim iiſdem poſitis, cum ſit Ad. Ab = AH. AP (*Lib IX. §.* 57.); ob parallelifmum ſcilicet rectarum Hk, PQ, ſitque HK, PQ = AH. AP (§. 59.), erit quoque Ad. Ab = HK. PQ (*Lib. I. §.* 76.). Sunt autem duo plana ſimilia FGHK, MNPQ in ratione *duplicata* ſuorum laterum homologorum HK, PQ (*Lib. IX. §.* 170.). Ergo duo ipſa plana erunt ſimiliter in ratione *duplicata* altitudinis Ad ad altitudinem Ab.

Caſus III.

Altitudo demum datæ pyramidis cadat extra illius baſim, altitudo ni-
Fig. 1. Tab. 8. mirum pyramidis ABD ſit recta AZ; altitudo ſectionis FGHK ſit recta An, & altitudo ſectionis MNPQ ſit recta Am. Dico, ſectionem FGHK eſſe ad ſectionem MNPQ in ratione *duplicata* altitudinis An ad altitudinem Am.

Demonſtratio.

Quandoquidem iiſdem poſitis, cum ſegmenta *cd*, *ab* ſint parallela, inter ſe quoque parallelæ erunt rectæ *cn*, *am*. Qambrorem erit An ad Am, ut Ad ad Ab (§. 57.), adeoque etiam ut HK ad PQ, cum ſcilicet oſtenſum fuerit, eſſe HK. PQ = Ad. Ab. Sunt autem duo plana FGHK, MNPQ in ratione *duplicata* laterum HK, PQ. Ergo erunt quoque in ratione *duplicata* altudinis An ad altitudinem Am. Itaque ſectiones pyramidis &c, quod erat oſtendendum.

C o r o l l a r i u m.

Elementa pyramidis decreſcunt in ratione duplicata imminutæ altitudinis.

94. Cum enim elementa pyramidis determinentur ſectionibus baſi parallelis,

lis, ficuti hujufmodi fectiones defcrefcunt in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis, in eadem quoque ratione pyramidis elementa minuuntur.

Genefis pyramidis.

95. Pyramis oritur ex tali motu plani rectilinei, ut fibi femper fit parallelum, continuo uniformiter decrefcat in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis ipfius pyramidis, ejufque centrum rectam lineam defcribat. Confurgit nimirum pyramis ABD ex parallela elevatione figuræ planæ rectilineæ BCDE, ita tamen ut continuo uniformiter minuatur in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis Ae ipfius pyramidis, atque ipfius figuræ centrum e rectam eA in hujufmodi motu defcribat. Hanc autem elevationem decrefcentis plani metitur altitudo ipfius pyramidis. Patet ex natura elementorum, quibus pyramidem conftare diximus. Fig. 18. Tab. 7.

COROLLARIUM I.

96. *Pyramis componitur ex tot planis rectilineis bafi fimilibus, fibi mutuo, atque bafi parallelis, continuo uniformiter apicem verfus decrefcentibus, quot in illius altitudine puncta numerantur.* Patet ex genefi ipfius pyramidis.

COROLLARIUM II.

97. Hinc *pyramis confiderari poteft, veluti factum ex ductu figuræ planæ rectilineæ, five bafis ipfius pyramidis continuo uniformiter decrefcentis, in altitudinem.*

THEOREMA VI.

Si conus fecetur plano per verticem ad bafim traducto, fectio erit triangulum rectilineum.

98. Conus BAD fecetur plano, quod tranfeat per verticem A, ejufque bafim BCD dividat. Dico, hujufmodi fectionem BAD, vel EAF effe triangulum rectilineum. Fig. 10. Tab. 7.

Demonftratio.

Hæc enim fectio tribus rectis lineis AB, BD, DA, vel AE, EF, FA comprehenfa. eft. Nam duæ BD, EF funt communes fectiones planorum fecantium BAD, EAF, & bafis BCD, quæ funt lineæ rectæ (*Lib. VIII. §. 24.*). Duæ vero AB, AD, ficuti etiam duæ AE, AF funt communes fectiones conicæ fuperficiei, atque eorundem planorum; ac proinde funt rectæ lineæ congruentes illi rectæ, ex qua, dum movetur circa peripheriam circuli BCD, conica ipfa fuperficies BAD producitur (§. 30.). Ergo fectiones BAD, EAF

sunt triangula plana rectilinea. Itaque si conus &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Sectio per axim coni aequilateri est triangulum aequilaterum; coni isosceles est triangulum isosceles; & coni scaleni est triangulum scalenum.

99. In sectione siquidem coni, quae plano per illius axim traducto perficitur, recta ex sectione baseos determinata per illius centrum transit. Quamobrem sectio per axim coni aequilateri erit *triangulum aequilaterum*; coni isoscelis erit *triangulum isosceles*; & coni scaleni erit *triangulum scalenum* (§. 32.).

THEOREMA VII.

Sectiones coni cujuscunque basi parallelae decrescunt in ratione duplicata imminutae altitudinis.

Fig. 7. Tab. 7. 100. Conus BAD secetur plano basi BCD parallelo, sitque circulus MN illius sectio. Dico, sectionem MN minui supra basim BCD in ratione *duplicata* imminutae altitudinis, videlicet basim BCD esse ad sectionem MN in ratione *duplicata* altitudinis AE ad altitudinem AZ.

Demonstratio I.

Conus quicunque est pyramis infinitorum laterum (§. 72.). Sectiones autem pyramidis basi parallelae decrescunt in ratione *duplicata* imminutae altitudinis (§. 93.). Ergo in eadem quoque ratione minuuntur sectiones coni, quae sunt basi parallelae.

Demonstratio II.

I.

Conus BAD sit rectus. Secetur autem plano per verticem A, & centrum E basis BCD traducto, atque adeo per centrum Z sectionis, sive circuli MN transeunte (§. 31.). Itaque sectiones MZN, BED planorum circularium MN, BCD erunt rectae lineae (*Lib. VIII.* §. 24.); cumque hujusmodi rectae transeant per centra circulorum MN, BCD ob hypothesim, erunt ipsorum circulorum diametri (*Lib. VII.* §. 7.). Sunt autem rectae BD, MN parallelae inter se (*Lib. VIII.* §. 26.), ob parallelismum scilicet planorum MN, BCD. Ergo, cum sectio BAD sit triangulum (§. 98.), duo triangula BAD, MAN erunt similia (*Lib. IX* §. 65.), eorumque latera BD, MN, utpote eidem angulo BAD opposita, erunt homologa (§. 67.). Erit ergo altitudo AE trianguli BAD ad

ad altitudinem AZ trianguli MAN, ut est basis, sive diameter BD circuli BCD ad basim, sive ad diametrum MN circuli MN (§. 78.). Circulus autem BCD est ad circulum MN in ratione *duplicata* diametri BD ad diametrum MN (§. 186.). Ergo circulus BCD erit ad circulum MN in ratione quoque *duplicata* altitudinis AE ad altitudinis AZ; adeoque &c.

II.

Esto modo conus obliquus *bad*, cujus altitudo sit recta *ag*. Secetur autem plano per verticem *a*, & centrum *e* basis *bcd*, ut supra, traducto. Sectio *bad* erit triangulum (§. 98.), duoque triangula *bad*, *man* erunt similia ob parallelismum rectarum, sive sectionum *bd*, *mn*, quemadmodum supra demonstravimus; eorumque latera homologa erunt ipsæ rectæ *bd*, *mn*, diametri nimirum basis *bd*, *mn*, quemadmodum supra demonstravimus, eorumque latera homologa erunt ipsæ rectæ *bd*, *mn*, diametri nimirum basis *bd*, & sectionis *mn*. Erit igitur altitudo *ag* trianguli *bad* ad altitudinem *ax* trianguli *man*, ut est latus *bd*, sive diameter basis *bcd* ad latus *mn*, sive ad diametrum sectionis conicæ basi parallelæ *mn* (*Lib IX.* §. 78.). Est autem basis *bcd* ad sectionem *mn* in ratione *duplicata* diametri *bd* ad diametrum *mn* (§. 186.). Ergo basis *bcd* erit sectionem *mn* in ratione itidem *duplicata* altitudinis *ag* ad altitudinem *ax*. Itaque sectiones coni &c. quod erat ostendendum. Fig. 8. Tab. 7.

COROLLARIUM.

Coni elementa decrescunt in ratione duplicata imminutæ altitudinis.

101. Elementa siquidem coni sunt circuli basi paralleli.

Genesis coni.

102. Oritur conus ex tali motu circuli, ut sibi semper sit parallelus, continuò uniformiter minuatur in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis, ejusque centrum rectam lineam a coni axe minime diversam describat. Sic conus ABCD consurgit ex parallela elevatione circuli BCD continuo uniformiter decrescentis in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis AE, & quidem tali lege, ut centrum E circuli genitoris in axe AE ipsius coni continuo reperiatur. Patet ex natura elementorum, quibus conus ipse componitur. Fig. 7. Tab. 7.

COROLLARIUM I.

103. *Consurgit propterea conus quicunque ex tot circulis basi, sibique mutuò parallelis, continuo apicem versus uniformiter decrescentibus, quod in illius altitudine puncta numerantur.*

Corollarium II.

104. *Hinc conus considerari potest veluti factum ex multiplicatione circuli basis, continuo uniformiter in ratione duplicata imminuta altitudinis decrescentis, per ipsius altitudinem.*

Theorema VIII.

Si duae pyramides ejusdem generis secentur planis, quae sint earundem basibus, parallela, atque ipsarum altitudines; porportionaliter dividant, sectiones hujusmodi erunt directe inter se, ut ipsarum pyramidum bases.

105. Duae pyramides trilaterae ABCD, *abcd* secentur planis EFK, *efk*, quae
Fig. 2. parallela sint basibus BCD, *bcd*, earumque altitudines AN, *an* proportiona-
Fig. 3 liter dividant in punctis M, *m*, ita nimirum ut sit *an* ad *am*, ut est AN
Tab. 8. ad AM. Dico, sectionem EFK esse ad sectionem *efk*, ut est basis BCD ad basim *bcd*.

Demonstratio.

Cum ex hypothesi sectiones EFK, *efk* sint basibus BCD, *bcd* parallelae; erit basis BCD ad sectionem EFK in ratione *duplicata* altitudinis AN ad altitudinem AM, quemadmodum etiam basis *bcd* ad sectionem *efk* in ratione *duplicata* altitudinis *an* ad altitudinem *am* (§. 100.). Posuimus autem, rationem altitudinis *an* ad altitudinem *am* eandem esse cum ratione altitudinis AN ad altitudinem AM. Ergo ratio quoque basis *bcd* ad sectionem *efk* eadem erit cum ratione basis BCD ad sectionem EFK, erit nempe BCD. EFK $=$ *bcd*. *efk*. Igitur *alternando* erit quoque EFK. *efk* $=$ BCD. *bcd* (*Lib. I.* §. 125.), sive sectio EFK ad sectionem *efk*, ut est basis BCD ad basim *bcd*. Itaque si duae pyramides &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Si duae pyramides ejusdem generis aequalium basium, sed inaequalium altitudinum secentur planis, quae sint illarum basibus parallela, & altitudines proportionaliter dividant, eorum sectiones erunt aequales.

106. Aequales nimirum erunt sectiones EFK, *efk* pyramidum ABCD;
Fig. 2. *abcd*, si bases BCD, *bcd* aequales fuerint, & altitudo AN ad altitudinem
Fig. 3. AM, ut altitudo *an* ad altitudinem *am*. Cum enim sectiones EFK, *efk*
Tab. 8. futurae hoc ipso sint inter se, ut bases BCD, *bcd*, quemadmodum bases per hypothesim sunt aequales, ipsae quoque sectiones erunt aequales.

Co-

COROLLARIUM II.

Si duæ pyramides ejusdem generis æqualium basium, & altitudinum ad eandem altitudinem planis, quæ sint earum basibus parallela, dividantur, earum sectiones erunt æquales.

107. Ut si pyramides triangulares *abcd*, ABCD æquales habentes bases *bcd*, BCD, & altitudines *an*, AN secentur ad æquales altitudines A*m*, Fig. 3.
AM planis *efk*, EFK, quæ sint earum basibus parallela, sectiones ipsæ Fig. 4.
efk, EFk erunt æquales. Hujusmodi namque sectiones sunt directe inter Tab. 8.
se, ut bases (§. 105.).

THEOREMA IX.

Si duo coni secentur planis, quæ eorum basibus sint parallela, ipsorumque altitudines proportionaliter dividant, sectiones erunt directe, ut ipsæ bases.

108. Coni ABC, MNO secentur planis DE, QR, quæ sint basibus BC, Fig. 5.
NO parallela, altitudines vero AL, MP proportionaliter dividant, sit ni- Fig. 6.
mirum MP ad MY, ut AL ad AK. Dico, sectiones DE, QR esse dire- Tab. 8.
cte inter se, ut bases BC, NO.

Demonstratio I.

Conus est pyramis infinitorum laterum (§. 78.). Ergo quemadmodum in pyramidibus, ita in conis sectiones, quæ fiunt planis eorum basibus parallelis, ipsorumque altitudines proportionaliter dividentibus sunt, directe inter se, ut ipsæ bases.

Demonstratio II.

Cum enim conicæ sectiones basi parallelæ sint circuli (§. 91.), iique decrescant in ratione duplicata imminutæ altitudinis (§. 100.), erit basis NO, ad sectionem QR, ut est basis BC ad sectionem DE (posita est enim altitudo MP ad altitudinem MY, ut est altitudo AL ad altitudinem AK). Ergo *alternando* erit sectio DE ad sectionem QR, ut est basis BC ad basim NO (*Lib. I.* §. 125.). Itaque si duo coni &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Si duorum conorum baſes fuerint æquales, & plana baſibus parallela, quibus ſecantur, eorum altitudines inæquales proportionaliter diviſerint, eorum ſectiones erunt æquales.

109. Ut ſi baſis BC coni ABC æqualis fuerit baſi NO coni MNO, &
Fig. 5. inæquales altitudines AL, MP proportionaliter ſectæ fuerint in punctis K, Y
Fig. 6. planis DE, QR quæ ſint eorum baſibus parallela, ſectiones ipſæ DE, QR
Tab. 8. erunt æquales. Sunt enim ſectiones hujuſmodi directe inter ſe, ut ipſæ baſes.

COROLLARIUM II.

Si duo coni æqualium baſium, & altitudinum ad eandem altitudinem planis eorum baſibus parallelis ſecti fuerint, eorum ſectiones erunt æquales.

110. Si nimirum coni ABD, *abd* æqualium baſium BCD, *bcd*, & altitudinum AE, *ag* ad eandem altitudinem *ax* ſecti fuerint planis MN, *mn*,
Fig. 7. quæ ſint eorum baſibus parallela, ſectiones ipſæ MN, *mn* erunt æquales.
Fig. 8. Circuli namque ſectionum MN, *mn* ſunt directe inter ſe, ut circuli baſium BCD, *bcd*.
Tab. 7.

THEOREMA X.

Si cylindrus ſecetur plano, quod vel tranſeat per centra circulorum, quibus terminatur, vel illius axi parallelum exiſtat, ſectio erit parallelogrammum.

I.

111. Cylindrus ACDB ſecetur plano, & quidem primo, quod per
Fig. 7. centra *m*, *n* tranſeat circulorum AB, CD, quibus cylindrus terminatur
Tab. 8. ſitque illius ſectio ACDB. Dico hanc eſſe parallelogrammum.

Demonſtratio.

Mutua ſectio plani ſecantis, & circuli AB, ſicuti etiam circuli CD, eſt recta linea (*Lib. VIII. §. 24.*) Hujuſmodi quoque ſunt ſectiones cylindricæ ſuperficiei, & plani, ut ex geneſi ipſius ſuperficiei eſt manifeſtum. Sectio itaque cylindri quatuor rectis AC, CD, DB, BA terminatur. Duæ autem rectæ AB, CD æquales ſunt (*§. 36.*), & parallelæ (*Lib. VIII. §. 26.*) Ergo duæ quoque AC, BD æquales erunt (*Lib. V. §. 75.*), & parallelæ (*§. 88.*) atque ideo ſectio ACDB erit parallelogrammum. (*Lib. VI. §. 8.*)

II.

112. Secetur modo cylindrus ACDB plano *acdb*, quod sit ipsius axi *mn* parallelo. Dico sectionem quoque *acdb* esse parallelogrammum.

Demonstratio.

Etenim hujusmodi quoque sectio *acdb* rectis lineis terminatur. Id enim eodem modo ostendetur, quo idipsum ostensum est de sectione ACDB. Duæ enim *ab*, *cd* æquales sunt inter se, (*Lib.* VII. §. 60.) utpote æqualiter distantes per hypothesim a centro sui circuli A*a*B, C*d*D *respective*. Suntque insuper parallelæ, cum paralleli sint circuli A*a*B, C*d*D, in eodemque plano secante ambæ consistant. Ergo duæ quoque *ac*, *bd* æquales erunt inter se, (*Lib. V.* §. 75.) & parallelæ (*Ibid.* §. 88.): ac proinde sectio *acdb* erit parallelogrammum (*Lib. VI.* §. 8.) Si ergo cylindrus secetur plano &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XI.

Omnia cujusvis cylindri latera sunt ejusdem axi æqualia.

113. Recta AC sit latus cylindri A*d*, cujus axis sit recta *mn*. Duo, rectas AC, *mn* esse inter se æquales.

Demonstratio.

A centro *m* circuli A*b*B ad extremum A ducatur radius *m*A, & a centro *n* circuli C*d* ad extremum C radius *n*C. Quoniam igitur duæ rectæ AC, *mn* sunt parallelæ (§. 37.), erunt in plano (*Lib.* VIII. §. 18.) ac proinde in eodem itidem plano erunt duæ *m*A, *n*C. Duæ autem *m*A, *n*C sunt æquales ob æqualitatem circulorum A*b*, C*d*, & parallelæ inter se ob eorundem circulorum parallelismum (*Ibid.* §. 26.) Ergo duæ quoque rectæ AC, *mn* sunt inter se æquales (*Lib.* V. §. 75.) Itaque omnia cujusvis cylindri &c. quod erat ostendendum. Fig. 7. Tab. 8.

COROLLARIUM.

Omnia cujusvis cylindri latera sunt inter se æqualia.

114. Cum enim omnia sint æqualia ejusdem axi, inter se quoque erunt æqualia (*Synop. Alg.* §. 259.)

THEO-

THEOREMA XII.

Polyedrum quodcunque resolvi potest in tot pyramides, quot sunt illius plana.

115. Esto polyedrum ABC. Dico, ipsum in tot pyramides resolvi posse, quot sunt plana AL*a*, A*ac*, A*c*N &c. quibus terminatur.

Demonstratio.

Fig. 14. Tab. 7. Etenim si ex puncto in illius area sumto ducantur rectæ ad apices A, L, B, *a*, *b* M &c. solidorum omnium angulorum, quos plana ipsa constituunt, perspicuum est, tot hinc pyramides designari, quot sunt ipsa plana, omnesque hujusmodi pyramides simul sumtas polyedrum ipsum æquare (*Syn. Alg.* §. 256.). Ergo &c. Itaque polyedrum &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XIII.

Unius sphæræ unicum est centrum.

116. Punctum E sit centrum sphæræ ABCD. Dico, nullum aliud punctum in ipsa sphæra sumi posse, quod sit illius centrum.

Demonstratio.

Fig. 15. Tab. 7. Coincidit cum demonstratione theorematis 1. lib. VII., ut enim omnes radii circuli, ita omnes sphæræ radii sunt inter se æquales (§. 56.).

THEOREMA XIV.

Si radius sphæræ rectam lineam in sphæra extra illius centrum ductam ad perpendiculum secuerit, bifariam illam secabit. Et vicissim, si bifariam rectam ipsam secuerit, ad perpendiculum illi incumbet.

117. Radius K*b* sphæræ AGB ad perpendiculum, sive ad rectos angulos dividat rectam AB extra illius centrum K cadentem. Dico, rectam AB bifariam ab ipso radio dividi. Vicissim vero ad rectos angulos rectam ipsam AB ab eodem radio secari, si bifariam ab eodem divisa fuerit.

Demonstratio.

Fig. 8. Tab. 7. Eadem est quoad utramque partem cum demonstratione theorematis 3. lib. VII.

THEO-

THEOREMA XV.

In sphæra æquales rectæ lineæ æqualiter ab illius centro distant; & quæ æqualiter ab illius centro distant, sunt æquales.

118. In sphæra AGHB sint duæ rectæ æquales AB, EF. Dico, eas æqualiter distare ab illius centro K. Vicissim vero eas æquales esse inter se, si eadem fuerit utriusque distantia ab ipso centro. Fig. 8. Tab. 8.

Demonstratio.

Utraque pars demonstratur eodem modo, quo ostensum est theorema 11; lib. VII.

THEOREMA XVI.

Recta in sphæra, quæ per centrum transit, est omnium maxima. Aliarum vero propinquior centro remotiore major est.

119. In sphæra AGHB quamplures habeantur rectæ lineæ CD, EF, GH, quarum CD transeat per centrum K ipsius sphæræ; aliarum vero recta EF proximior sit centro K, quam recta GH. Dico, rectam CD esse omnium maximam, rectam vero EF majorem esse recta GH. Fig. 8. Tab. 8.

Demonstratio.

Coincidit quoad utramque partem cum demonstratione theorematis 12. lib. VII.

COROLLARIUM I.

Diameter sphæræ maxima est omnium rectarum, quæ in ipsa sphæra duci possunt.

120. Sola enim diameter per sphæræ centrum transit (§. 54.).

COROLLARIUM II.

Maxima rectarum, quæ in sphæra duci possunt, per illius centrum transit.

121. Etenim si secus, recta per centrum transiens non esset omnium maxima.

THEOREMA XVII.

Si ſphæra planum tangat, & a centro ipſius ſphæræ ad punctum contactus recta ducatur, erit ipſi plano perpendicularis.

122. Sphæra ABC tangat planum FG in puncto B, ad quod a centro D ipſius ſphæræ ducatur recta DB. Dico, rectam DB plano FG ad perpendiculum incumbere.

Demonſtratio.

Fig. 9. Tab. 8. Coincidit cum demonſtratione theorematis 6. lib. VII. Enimvero, ſi recta DB non eſt perpendicularis plano FG, perpendicularis ſit ipſi plano recta DE. Manifeſtum eſt autem, rectam DE majorem eſſe recta DB, cum ſegmentum D*a* ipſius DE adæquet rectam DB (§. 56.). Ergo recta perpendicularis DE non eſt minima omnium rectarum, quæ a puncto D in planum FG cadere poſſunt. Hoc autem fieri nequit (*Lib.* VIII. §. 16.). Igitur recta DE non eſt plano FG perpendicularis, eandemque ob cauſam nulla alia diverſa a recta DB. Si ergo ſphæra &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Sphæra tangens planum in uno dumtaxat puncto ipſum tangit.

123. Etenim ſi ſecus, plures rectæ lineæ ab eodem puncto in planum cadentes, eidem plano ad perpendiculum incumberent, quod omnino repugnat (§. 15.).

COROLLARIUM II.

Sphæra exterius ſphæram tangens in uno tantum puncto ipſam tangit.

Fig. 10. Tab. 8. 124. Non enim poteſt ſphæra AB tangere ſphæram CD in duobus ſimul punctis *m*, *a*, quin utraque in illis ſimul punctis tangat planum EF, ut eſt manifeſtum.

SCHOLION.

125. Ex eo, quod ſphæræ, & plani contactus in uno dumtaxat fiat puncto, ratio repetenda eſt, cur ſphæra ſuper planum apprime politum conſiſtens, ad ictum vel leviſſimum quoquoverſus moveatur.

THEO-

THEOREMA XVIII.

Recta conjungens centra duarum sphærarum se se mutuo tangentium transit per punctum mutui contactus.

126. Duæ sphæræ AB, CD se se mutuo exterius tangant in puncto *a*. Harum autem sphærarum centra *x*, *y* jungantur recta linea. Dico, hanc transire per punctum contactus *a*.

Demonstratio.

Si enim fieri potest, hujusmodi recta transeat extra punctum mutui contactus, sitque *xmy*. Ab utroque autem centro *x*, *y* ad punctum *a* ducantur rectæ *xa*, *ya*, & per idem punctum *a* transeat planum EF, quod in eodem puncto tangat utramque sphæram AB, CD. Quoniam igitur utraque *ya*, *xa* perpendicularis est plano EF (§. 122.) perpendicularis quoque erit rectæ EF in eodem plano positæ (*Lib.* VIII. §. 2.), ac proinde recti erunt anguli E*ay*, E*ax* (*Lib.* III §. 23.). Ergo duæ *xa*, *ya* sunt in directum positæ (§. 49.), seu unam eandemque rectam lineam constituunt *xay*. Recta autem posita est etiam linea *xmy*. Igitur duæ rectæ *xay*, *xmy* spatium concludunt. Id porro fieri nequit (*Lib.* IV. §. 7.). Ergo linea *xmy* non est recta, eademque ratione nulla alia, quæ ducta a centro *x* ad centrum *y* transeat extra punctum contactus *a*. Recta itaque conjungens &c. quod erat ostendendum. Fig. 10. Tab. 8.

THEOREMA XIX.

Si sphæra planum tangat, & a puncto contactus recta intra ipsam sphæram excitetur plano perpendicularis, erit in illa centrum ipsius sphæræ.

127. Sphæra ABC tangat planum FG in puncto B, a quo intra ipsam sphæram excitetur recta perpendicularis BD. Dico, rectam BD transire per centrum ipsius sphæræ.

Demonstratio.

Si enim fieri potest, centrum sphæræ sit extra ipsam perpendicularem BD, sitque illud punctum *b*. Ducta ergo a centro *b* ad punctum contactus B recta *b*B, hæc erit plano FG perpendicularis (§. 122.). Eidem autem plano etiam recta BD posita est perpendicularis. Ergo duæ rectæ *b*B, BD sunt simul plano FG perpendiculares. Id porro repugnat (*Lib.* VIII. §. 14.). Ergo punctum *b* non est centrum sphæræ ABC, & eandem ob causam nullum aliud extra rectam BD. Recta igitur BD transit per centrum sphæræ ABC; atque adeo si sphæra &c. quod erat ostendendum. Fig. 7. Tab. 8.

ELE-

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM
LIBER XII.
De circulis ſphæræ.

EA circulorum ſphæræ ſymptomata hoc in libro demonſtramus, quorum cognitio ad illorum intelligentiam neceſſaria eſt, quæ de *ſphæra mundi*, deque *aſtrorum motibus* in Aſtronomia traduntur.

DEFINITIO I.

Fig. 15. Tab. 7. 1. *Axis ſphæræ eſt recta linea per illius centrum ducta, & utrinque ad ejuſdem ſuperficiem terminata, circa quam penitus quieſcentem ſphæra rotari intelligitur*. Ut ſi ſphæra ABCD revolvatur circa rectam BD per illius centrum traductam, ac interim omnino quieſcentem, recta BD erit axis ipſius ſphæræ ABCD.

COROLLARIUM.

2. *Axis ſphæræ eſt etiam illius diameter. Verum non omnis diameter ſphæræ axis dici poteſt*. *Axis* enim, quemadmodum diameter, per ſphæræ centrum tranſit, & utrinque in illius ſuperficiem deſinit. At ſphæra non circa quamcumque diametrum, ſed circa unam tantum revolvitur.

DEFINITIO II.

3. *Poli ſphæræ*, qui illius etiam *cardines* vocantur, *ſunt puncta extrema axis*. Ut ſi *axis* ſphæræ ABCD ſit recta BD, *poli* ipſius ſphæræ erunt duo puncta B, D.

COROLLARIUM.

4. *Poli ſphæræ ſunt duo puncta ſumta in illius ſuperficie, ſibi mutuo ex diametro oppoſita, atque ad motum ſphæræ penitus immobilia*. Sunt enim extrema *axis*, qui per centrum tranſit, & ad motum ſphæræ omnino quieſcit.

DE-

DEFINITIO III.

5. *Circuli sphaeræ dicuntur illi, quorum peripheria in ipsius sphaeræ superficie reperitur*. Hujusmodi sunt circuli BFDE, GH in sphæra ABCD. Fig. 11. Tab. 8.

DEFINITIO IV.

6. *Polus circuli in sphaera descripti est punctum sumtum in superficie sphaeræ, a quo omnes rectæ ad illius peripheriam ductæ, sunt inter se æquales.* Ut si rectæ AB, AD, omnesque aliæ, quæ duci possunt a puncto A in peripheriam circuli BFD, fuerint æquales, punctum A erit *polus* circuli BFD. Eadem ratione alter ejusdem circuli *polus* erit punctum C, si rectæ BC, CD, quemadmodum etiam ceteræ omnes a puncto C ductæ in peripheriam ipsius circuli BFD, æquales inter se fuerint. Fig. 11. Tab. 8.

COROLLARIUM I.

7. *Polus circuli in sphaera positi est illud punctum sumtum in superficie sphaeræ, ex quo, veluti centro, ipsius circuli peripheria in sphaera descripta est.*

COROLLARIUM II.

8. *Poli sphaeræ erunt etiam poli circuli in ea descripti, si omnes rectæ ductæ a polis sphaeræ in peripheriam ipsius circuli, fuerint inter se æquales.* Nimirum si puncta A, C fuerint *poli* sphæræ ABCD, erunt etiam *poli* circulorum GH, BFD, si rectæ AG, AH * GC, CH æquales inter se fuerint, quemadmodum etiam rectæ AB, AD * CB, CD. Fig. 11. Tab. 8

DEFINITIO V.

9. *Axis circuli in sphaera descripti est recta ducta ab uno in alterum polum ipsius circuli*. Ut si puncta A, C fuerint *poli* circuli GH, recta AC erit illius *axis*. Fig. 11. Tab. 8.

COROLLARIUM I.

10. *Si poli circuli in sphaera descripti diversi non fuerint a polis sphaeræ; axis sphaeræ erit etiam axis ipsius circuli*. Neque enim possunt esse iidem *poli*, nisi idem quoque sit utriusque *axis*.

COROLLARIUM II.

11. *Si axis circuli sphaeræ sit etiam axis ipsius sphaeræ, iidem quoque erunt utriusque poli*. Sunt enim *poli* extrema *axis*.

COROLLARIUM III.

12. *Idem est axis omnium circulorum sphæræ, quibus iidem sunt poli*: Quippe *axis* est recta ducta a *polo* ad *polum*.

COROLLARIUM IV.

13. *Circuli in sphæra, quorum idem est axis, eosdem polos habent*. Etenim *axis* cujusvis circuli in illius *polos* desinit.

DEFINITIO VI.

14. *Ille circulus in sphæra æqualiter distare dicitur ab utroque polo ipsius*
Fig. 11. Tab. 8. *sphæræ, cum omnes rectæ ductæ ab uno ipsius sphæræ polo in illius peripheriam, æquales sunt tum inter se, tum rectis omnibus, quæ ab altero polo in eandem peripheriam cadere possunt*. Ut si *poli* sphæræ ABCD fuerint duo puncta A, C, & æquales fuerint rectæ AB, AD tum inter se, tum rectis CB, CD, quæ ab ipsis *polis* in circuli BFD peripheriam cadunt, circulus BFD æqualiter distare dicetur a *polis* A, C ipsius sphæræ.

COROLLARIUM I.

15. *Poli circuli in sphæra ab utroque polo ipsius sphæræ æqualiter distantis, diversi non sunt a polis ejusdem sphæræ*. Æquales namque sunt omnes rectæ, quæ ab utroque sphæræ *polo* in ipsius circuli peripheriam cadunt. Ergo iidem erunt utriusque *poli* (§. 8.).

COROLLARIUM II.

16. *Axis circuli æqualiter distantis ab utroque polo sphæræ est etiam axis ipsius sphæræ*. Cum enim iidem sint utriusque *poli* (§. 15.), idem quoque erit utriusque *axis* (§. 10.).

DEFINITIO VII.

17. *Duo circuli in sphæra æqualiter distare dicuntur ab illius polis, cum omnes rectæ ductæ ab uno polo in unius peripheriam æquales sunt tum inter se, tum omnibus rectis, quæ ab altero polo in alterius peripheriam cadunt*. Ut si
Fig. 13. Tab. 7. duo circuli BF, CE ita se habuerint in sphæra ABE, ut omnes rectæ AB, AF ductæ a *polo* A sphæræ in peripheriam circuli BF æquales fuerint tum inter se, tum rectis omnibus, quæ a *polo* D ejusdem sphæræ in circuli CE peripheriam cadunt, duo circuli BF, CE æqualiter distantes erunt a *polis* A, D ipsius sphæræ.

Co-

Corollarium I.

18. *Poli sphæræ sunt etiam poli omnium illorum circulorum, qui ab illis æqualiter distant.* Æquales enim sunt rectæ, quæ ab ipsis *polis* in illorum circulorum peripheriam cadunt, prout requiritur, ut sint eorundem *poli* (§.8.).

Corollarium II.

19. *Omnium circulorum, qui æqualiter distant a polis sphæræ, iidem sunt poli.* Omnium enim *poli* sunt *poli* sphæræ (§. 18.).

Corollarium III.

20. *Axis circulorum, qui æqualiter distant a polis sphæræ, ab axe ipsius sphæræ minime distinguitur.* Neque enim potest eorum *axis* esse diversus, si iidem sunt *poli* (§. 12.).

Corollarium IV.

21. *Idem est axis omnium illorum circulorum, qui æqualiter distant a polis sphæræ.* Horum quippe omnium *axis* est *axis* ipsius sphæræ (§. 20.).

Definitio VIII.

22. *Ille circulus in sphæra vocatur obliquus, in cujus peripheriam cadunt inæquales rectæ lineæ ab utroque polo ipsius sphæræ.* Ut si puncta A, D fuerint *poli* sphæræ ABCD, circulus BEC erit in illa *obliquus*; quia inæquales sunt rectæ AB, AC, quæ a *polo* A in illius peripheriam cadunt. Fig. 12. Tab. 8.

Corollarium I.

23. *Poli circuli in sphæra obliqui diversi sunt a polis sphæræ.* Ut enim iidem sint *poli*, æquales debent esse rectæ, quæ ab utroque sphæræ *polo* in ipsius circuli peripheriam cadunt (§. 8.).

Corollarium II.

24. *Axis circuli in sphæra obliqui diversus est ab axe sphæræ.* Quippe ut idem sit *axis*, iidem debent esse *poli* (§. 10.).

Definitio IX.

25. *Distantia circuli in sphæra a suis polis, est arcus circuli per ipsius circuli polos transeuntis, inter illius peripheriam, ejusque polos comprehensus.* Ut si pun-

Tab. 14. puncta A, C fuerint *poli* circuli BEDF in sphæra ABCD, distantia ipsius
Fig. 8. circuli a suo *polo* A erit arcus AB circuli ABCD transeuntis per utrumque *polum* A, C, comprehensus inter *polum* A, & ipsius circuli peripheriam. Distantia vero ejusdem ab altero *polo* C, erit arcus BC ejusdem circuli.

COROLLARIUM.

26. *Tot ergo graduum, & minutorum erit distantia cujusvis circuli in sphera a suis polis, quot gradus, & minuta sunt in arcu, qui illius distantiam metitur.* Nimirum tot *graduum, & minutorum* erit distantia circuli BEDF a suo *polo* A, quot sunt *gradus*, & *minuta* in arcu AB circuli ABCD, penes quem hujusmodi distantia spectatur.

DEFINITIO X.

27. *Duo circuli in sphæra æqualiter ab illius centro distare dicuntur, cum rectæ perpendiculares ductæ a centro sphæræ in plana ipsorum circulorum sunt*
Fig. 13. *inter se æquales. Dicuntur vero inæqualiter distare ab ipso centro, cum*
Tab. 8. *recta hujusmodi sunt inæquales, ita nimirum, ut ille magis distet, in cujus planum ab ipso centro major perpendicularis cadit.* Ut si perpendiculares *xa*, *xd* ductæ a centro *x* sphæræ ACE in plana circulorum BF, CE, fuerint æquales, circuli BF, CE æqualiter distabunt a centro *x* ipsius sphæræ. Si vero recta *xa* major fuerit, quam recta *xd*, distantia circuli BF a centro *x* distantiam circuli CE ab eodem centro superabit.

DEFINITIO XI.

28. *Unus circulus in sphæra alterum orthogonaliter secare dicitur, cum unius planum alterius circuli planum ita dirimit, ut non magis in unam, quam in alteram partem inclinet. Dicitur vero secare oblique, cum eadem ubique non*
Fig. 14. *est unius in alterum inclinatio.* Orthogonaliter itaque circulus AECF secat
Fig. 12. circulum BEDF in sphæra ABCD, quia planum circuli AECF ita dirimit
Tab. 8. planum circuli BEDF, ut segmentum circulare EAF ad perpendiculum plano circuli BEDF insistat. Contra vero circulus DEAF oblique secat circulum BECF; quia ita illum dispescit, ut segmentum circulare EAF oblique plano circuli BECF incumbat.

DEFINITIO XII.

29. *Circuli in sphæra paralleli vocantur illi, quorum plana sunt inter se parallela:*
Fig. 13. Ut si planum circuli BF parallelum fuerit plano circuli CE, duo circuli BF,
Tab. 8. CE in sphæra ABE erunt paralleli.

Co-

COROLLARIUM.

30. *Peripheriæ circulorum in sphæra parallelorum sunt inter se parallelæ.* Nisi enim peripheriæ circulorum parallelorum in sphæra sint inter se parallelæ, eorum plana nequeunt esse sibi mutuo parallela.

DEFINITIO XIII.

31. *Anguli sphærales sunt illi, qui in sphæræ superficie a peripheriis duorum circulorum ipsius sphæræ se mutuo secantium in ea producuntur.* Ut si peripheria circuli BED secet in puncto E peripheriam circuli AEC in sphæra AEC, anguli BEA, AED, CED, BEC in illius superficie producti, *sphærales* vocantur. Etsi autem arcus omnium circulorum tam maximorum, quam non maximorum sphæræ *angulos sphæricos* in illius superficie constituere possint, verumtamen ii tantummodo anguli in sphæra spectantur, qui a peripheriis circulorum maximorum in ejus superficie producuntur. Hi ergo dividi solent in *rectos*, *acutos*, & *obtusos*, ut de angulis planis rectilineis alibi diximus. Fig. 14. Tab. 8.

DEFINITIO XIV.

32. *Angulus sphæralis rectus est ille, qui fit in superficie sphæræ a peripheriis duorum circulorum maximorum sese mutuo orthogonaliter secantium.* Ut si in sphæra ABCD duo circuli maximi BEDF, AECF sese orthogonaliter secent, anguli AEB, AED, CEB, CED ab eorum peripheriis in illius superficie producti, erunt anguli sphærales recti. Fig. 14. Tab. 8.

DEFINITIO XV.

33. *Angulus sphæralis acutus est ille, qui minor est recto. Angulus vero sphæralis obtusus est ille, qui rectum superat.* Sphæralis acutus est angulus AEB; obtusus vero angulus AEC. Quemadmodum ergo duo circuli in sphæra maximi, cum orthogonaliter sese mutuo secant, quatuor rectos angulos in puncto sectionis efficiunt, ita si oblique sese dispescant, binos angulos sphærales acutos, totidemque obtusos in communi sectionis puncto constituunt. Fig. 12. Tab. 8.

DEFINITIO XVI.

34. *Mensura anguli sphæralis a duobus circulis in sphæra maximis sese mutuo intersecantibus producti, est arcus circuli circa sectionis punctum in ipsa sphæra descripti, inter arcus angulum ipsum constituentes comprehensus.* Sic mensura anguli sphæralis BEA est arcus BA circuli ABCD descripti in ipsa sphæra circa punctum E, comprehensus inter arcus BE, AE, qui angulum ipsum BEA constituunt. Fig. 12. Tab. 8.

COROLLARIUM.

35. *Angulus sphæralis productus a duobus circulis in sphæra maximis erit tot graduum, & minutorum, quot gradus, & minuta complectitur arcus circuli circa sectionis punctum in sphæra descripti, inter arcus angulum ipsum constituentes comprehensus*. Tot nimirum *graduum*, & *minutorum* erit angulus sphæralis BEA, quot *gradus*, & *minuta* complectitur arcus BA, qui ipsius anguli quantitatem determinat.

Fig. 14. Tab. 8.

DEFINITIO XVII.

36. *Distantia a se mutuo duorum circulorum sphæræ eosdem polos habentium est arcus circuli per ipsorum polos transeuntis, inter peripherias ipsorum circulorum comprehensus*. Ut si duo circuli BF, CE eosdem polos habeant A, D, per quos transeat circulus ABDF, mensura distantiæ circuli BF a circulo CE erit arcus BC ipsius circuli ABDF, qui inter peripherias ipsorum circulorum BF, CE continetur.

Fig. 13. Tab. 5.

COROLLARIUM.

37. *Tot graduum, & minutorum est distantia duorum circulorum a se mutuo, quorum iidem sint poli, quot gradus, & minuta sunt in arcu, qui ipsorum distantiam metitur*. Sic tot *graduum*, & *minutorum* est distantia a se mutuo duorum circulorum BF, CE, quot sunt *gradus*, & *minuta* in arcu BC.

THEOREMA I.

Si sphæra secetur plano quomodocunque, communis sectio sphæræ, & plani erit circulus.

I.

38. Sphæra ABCD secetur plano, quod per illius centrum G transeat, sitque communis sectio BEDF. Dico, hanc esse circulum.

Demonstratio.

A centro G sphæræ ad curvam BEDF in plano sectionis BEDF ducantur rectæ GE, GH, GD, GF, & aliæ quotcumque. Cum igitur punctum G sit centrum sphæræ ABCD, rectæque GE, GH, GD, GF ipsius radii (*Lib. XI. §. 55.*), erunt omnes inter se æquales (*§. 56.*). Ergo sectio BEDF est circulus (*Lib. VII. §. 1.*).

Fig. 14. Tab. 8.

II.

I I.

39. Secetur modo ſphæra ABE plano CE extra illius centrum x traductο. Dico, ſectionem quoque CbE eſſe circulum. Fig. 11. Tab. 8.

Demonſtratio.

A centro x ipſius ſphæræ ad planum ſectionis CE ducatur recta perpendicularis xd. A puncto vero d ad extremum plani CE rectæ ducantur dC db, dE, & jungantur puncta x, C * x, b *, x, E, rectis xC, xb, xE. Quoniam igitur recta xd perpendicularis eſt plano CE, perpendicularis itidem erit rectis dC, db, dE (*Lib. VIII. §.* 2.), atque ideo recti erunt anguli xdC, xdb, xdE (*Lib. III. §.* 23.), & triangula xdC, xdb, xdE erunt rectangula (*Lib. V. §.* 29.). Quamobrem quadrata laterum xd, dC æqualia erunt quadrato hypotenuſæ xC, ſicuti etiam quadrata laterum xd, db quadrato hypotenuſæ xb (*Lib. VI. §.* 37.). Sunt autem quadrata rectarum xC, xb æqualia (*Lib. I. §.* 187.); cum lineæ ipſæ xC, xb, utpote ſphæræ radii ſint inter ſe æquales (*Lib. XI. §.* 56.). Ergo quadrata itidem laterum xd, dC ſimul ſumta æqualia erunt quadratis laterum xd, db (*Syn. Alg. §.* 265.). Ablato propterea communi quadrato lateris xd, erit quadratum lateris dC quadrato lateris bd æquale (§. 266.). Quadrata autem æqualia habent latera æqualia (*Lib. I. §.* 187.). Ergo recta dC rectam db æquabit. Eodem modo oſtendam, duas quoque db, dE eſſe æquales. Igitur æquales ſunt inter ſe tres rectæ dC, db, dE (*Syn. Alg. §.* 259.), eandemque ob cauſam omnes rectæ, quæ a puncto d in curvam CE duci poſſunt; ac proinde ſectio CbE erit circulus (*Lib. VII. §.* 1.). Si ergo ſphæra &c. quod erat oſtendendum.

Corollarium I.

Centrum circuli in ſphæra, qui per ipſius ſphæræ centrum tranſit, diverſum non eſt a centro ipſius ſphæræ.

40. Oſtenſum eſt enim, punctum G, quod eſt centrum ſphæræ ABCD, centrum quoque eſſe circuli BEDF, qui per ipſius ſphæræ centrum tranſit. Fig. 14. Tab. 8.

Corollarium III.

Diameter circuli per ſphæræ centrum tranſeuntis eſt etiam diameter ipſius ſphæræ.

41. Cum enim diameter tam ſphæræ, quam circuli ſit recta tranſiens per utriuſque centrum; & peripheria circuli in ſphæra poſiti tota in ipſius ſphæræ ſuperficie conſiſtat (§. 5.), idem nequit eſſe centrum ſphæræ, & circuli in illa deſcripti, niſi eadem quoque ſit utriuſque diameter.

COROLLARIUM III.

Recta ducta a centro sphæræ in planum circuli extra illius centrum transeuntis, eique ad perpendiculum incumbens, transit ad centrum ipsius circuli.

42. Si nimirum recta X*d* ducta a centro *x* sphæræ ABDE in planum circuli C*b*E fuerit ipsi plano perpendicularis, punctum *d* erit centrum ipsius circuli. Demonstravimus enim, rectas omnes *d*C, *db*, *d*E, quæ a puncto *d* in peripheriam C*b*E cadunt, esse inter se æquales.

Fig. 13. Tab. 8.

THEOREMA II.

Recta linea ducta a centro sphæræ in centrum circuli extra ipsius sphæræ centrum transeuntis, est plano ipsius circuli perpendicularis.

43. Extra centrum A sphæræ DBC habeatur circulus BC, in cujus centrum *a* cadat a centro A ipsius sphæræ recta A*a*. Dico, rectam hujusmodi plano circuli BC ad perpendiculum incumbere.

Demonstratio.

Fig. 15. Tab. 8.

Enim vero si recta A*a* perpendicularis non est circulo BC, ducatur a centro A sphæræ in planum ipsius circuli recta perpendicularis A*b*. Erit ergo punctum *b* centrum circuli BC (§. 5.). Est autem per hypothesim etiam punctum *a* centrum ejusdem circuli BC. Ergo circuli BC duo sunt centra *a*, *b*. Id autem repugnat (*Lib. VII. §. 36.*). Ergo punctum *b* non est centrum circuli BC; adeoque recta A*b* circulo BC ad perpendiculum non incumbit, eandemque ob causam nulla alia præter rectam A*a*. Igitur recta linea &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Illi circuli in sphæra æqualiter distant ab illius centro, in quorum centrum æquales rectæ cadunt a centro ipsius sphæræ. Inæqualiter vero illi, in quorum centrum a centro sphæræ cadunt rectæ inæquales.

Fig. 13. Tab. 8.

44. Eadem scilicet erit distantia circulorum BF, CE a centro *x* sphæræ ABCF, si rectæ, *xa*, *xd* ductæ ab ipsius sphæræ centro *x* in centra *a*, *d* ipsorum circulorum fuerint æquales. Inæqualis vero erit distantia, si rectæ *xa*, *xd* fuerint inæquales. Illi siquidem circuli æqualiter distare dicuntur a centro sphæræ, in quorum planum cadunt æquales rectæ perpendiculares a centro ipsius sphæræ. Illi vero dicuntur distare inæqualiter,

in

in quorum planum inæquales perpendiculares cadunt ab eodem centro (§. 27.). Ergo cum rectæ *xa*, *xd* perpendiculariter incumbant planis circulorum BF, CE, patet propositum.

THEOREMA III.

Circulus in sphæra, qui per illius centrum transit, est omnium maximus. Et vicissim circuli in sphæra maximi per illius centrum transeunt.

I.

45. In sphæra ABCD duo habeantur circuli BD, GH, quorum BD transeat per centrum *a* ipsius sphæræ. Dico circulum BD majorem esse circulo GH.

Demonstratio.

Cum enim circulus BD transeat per centrum *a* sphæræ ABCD, minime vero circulus GH, diameter circuli BD, non autem circuli GH, erit diameter ipsius sphæræ (§. 41.). Est autem diameter sphæræ omnium rectarum, quæ in ipsa sphæra esse possunt, maxima (*Lib. XI. §.* 120.). Ergo diameter circuli BD major erit diametro circuli GH. Ille autem circulus major est, qui majorem diametrum habet (*Lib IX. §.* 50). Ergo circulus BD major erit circulo GH, & eadem ratione omnibus aliis; qui extra centrum *a* in ipsa sphæra ABCD haberi possunt, adeoque &c. Fig. 11. Tab. 8.

II.

46. Vicissim vero circulus BD sit maximus in sphæra ABCD. Dico, ipsum transire per centrum ipsius sphæræ.

Demonstratio.

Enimvero, quoniam circulus BD maximus est in sphæra ABCD, illius quoque diameter BD erit maxima rectarum omnium, quæ in ipsa sphæra duci possunt. Atqui maxima rectarum in sphæra per illius centrum transit (*Lib. XI. §.* 119.). Ergo circulus quoque maximus BD per sphæræ ABCD centrum transeat necesse est. Itaque circulus &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Centrum circuli in sphæra maximi diversum non est a centro ipsius sphæræ.

47. Cum enim hujusmodi circulus transeat per centrum sphæræ, idem erit utriusque centrum (§. 40.).

Co-

Corollarium II.

Idem est centrum omnium circulorum maximorum sphæræ.

48. Etenim cum horum centrum diversum non sit a centro sphæræ (§. 47.), & unius sphæræ unicum sit centrum (§. 116.), unum erit centrum omnium circulorum maximorum sphæræ.

Corollarium III.

Diameter circuli in sphæra maximi est etiam diameter ipsius sphæræ.

49. Neque enim potest esse idem centrum utriusque, quin eadem quoque sit utriusque diameter; cum circuli peripheria in ipsius sphæræ superficie tota consistat (§. 5.).

Corollarium IV.

Diametri omnium circulorum maximorum sphæræ sunt inter se æquales.

50. Quandoquidem diametri omnium circulorum maximorum sphæræ sunt etiam diametri ipsius sphæræ (§. 49.), quæ omnes sunt inter se æquales (§. 57.).

Corollarium V.

Omnes circuli in sphæra maximi sunt inter se æquales.

51. Æquales namque sunt inter se omnes illi circuli, quorum diametri sunt æquales (*Lib. IX.* §. 50.). Hujusmodi autem sunt omnes diametri circulorum maximorum sphæræ (§. 57.). Ergo &c.

Corollarium VI.

Quilibet circulus in sphæra maximus sphæram ipsam bifariam dividit.

52. Cum enim quilibet circulus in sphæra maximus per ipsius sphæræ centrum transeat, quilibet eorum sphæram ipsam bifariam dividat necesse est. Dividitur enim sphæra bifariam plano per ipsius sphæræ centrum transeunte (*Lib. XI.* §. 53.).

THEO-

THEOREMA IV.

Omnes circuli in sphæra maximi sese mutuo bifariam dividunt.

53. In sphæra ABDC duo habeantur circuli maximi AEDF, BECF. Dico, eos sese mutuo bifariam dividere.

Demonstratio.

Quandoquidem cum idem sit utriusque circuli centrum (§. 48.), necesse est, ut sese mutuo dividant. Quoniam vero communis sectio duorum planorum est recta linea (*Lib. VIII.* §. 24.), recta EF erit sectio duorum circulorum AEDF, BECF, utpote terminata punctis E, F, in quibus ipsorum circulorum peripheriæ sese mutuo dirimunt. Igitur cum idem sit centrum omnium circulorum maximorum sphæræ, adeoque etiam circulorum AEDF, BECF (§. 48.), centrum horum circulorum erit in communi sectione, sive recta EF. Hæc autem in utriusque circuli peripheriam desinit, utpote punctis E, F terminata. Ergo recta EF erit utriusque circuli diameter (*Lib. VII.* §. 7.). Omnis porro diamater circuli dividit circulum ipsum bifariam (§. 8.). Ergo circuli AEDF, BECF bifariam a recta EF divisi erunt; ac proinde, cum recta EF sit communis utriusque sectio, circuli AEDF, BECF sese mutuo dividunt bifariam. Omnes itaque circuli in sphæra maximi &c. quod erat ostendendum. Fig. 12. Tab. 8.

COROLLARIUM.

Recta conjungens puncta, in quibus peripheriæ duorum circulorum maximorum sphæræ in illius superficie sese mutuo dirimunt, per ipsius sphæræ centrum transit.

54. Recta nimirum EF, qua simul junguntur puncta E, F, in quibus sese mutuo dirimunt peripheriæ duorum circulorum maximorum AEDF, BECF in sphæra ABDC, transibit per centrum ipsius sphæræ. Ostensum est enim, centrum circulorum AEDF, BECF esse in recta EF, quæ est communis utriusque sectio. Centrum autem sphæræ diversum non est a centro ipsorum circulorum AEDF, BECF (§. 47.), utpote qui in illa sunt maximi. Ergo recta EF conjungens puncta mutuæ sectionis E, F per ipsius sphæræ centrum transit. Fig. 12. Tab. 8.

THEOREMA V.

Circuli in sphæra, qui sese mutuo in ea bifariam secant, sunt maximi.

55. In sphæra ABDC duo habeantur circuli BECF, AEDF, qui in illa sese

ſeſe mutuo biſariam dividant. Dico, eos eſſe in ipſa ſphæra maximos.

Demonſtratio.

Cum enim ex hypotheſi duo circuli BECF, AEDF ſeſe mutuo biſariam dividant, communis ipſorum ſectio, recta nimirum EF, per utriuſque centrum tranſibit, ſeu communis erit utriſque diameter. Hæc enim tantum hu-
Fig. 12 Tab. 8. juſmodi eſt, ut circulum in duo æqualia ſegmenta diſpeſcat (*Lib. VII.* §. 8.). Igitur punctum *a*, quod in medio rectæ EF conſiſtit, erit centrum utriuſque circuli BECF (§. 3.); omneſque proinde rectæ *a*A, *a*B, *a*E, *a*D, *a*C, *a*F, & quotcunque ductæ a communi centro *a* in peripherias circulorum BECF, AEDF, erunt inter ſe æquales (§. 10.). Illæ autem peripheriæ ſunt in ſuperficie ſphæræ ABDC (§. 5.). Ergo rectæ omnes ductæ a puncto *a* in illa omnia ſphæricæ ſuperficiei puncta, quæ tranſeunt illæ peripheriæ, ſunt inter ſe æquales. Eodem modo oſtendam, ductis nimirum aliis circulis, qui cum altero ipſorum BECF, AEDF ſeſe mutuo biſariam dividant, rectas omnes ductas ab eodem puncto *a* in illorum peripherias æquales eſſe rectis, quæ ab eodem puncto *a* cadunt in peripheriam circuli BECF. Ergo omnes rectæ ductæ a puncto *a* ad ſuperficiem ſphæræ ABDC æquales ſunt inter ſe. Igitur punctum *a* erit ipſius ſphæræ centrum (*Lib XI.* §. 51.). Per illud autem tranſeunt circuli BECF, AEDF. Ergo ſunt in ipſa ſphæra maximi (§. 45.) Itaque circuli in ſphæra &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA VI.

Anguli ſphærales ad verticem oppoſiti, qui fiunt a duobus circulis in ſphæra maximis, ſunt inter ſe æquales.

56. Duo circuli maximi AEDF, BECF in ſphæra ABDC ſeſe mutuo ſe-
Tab. 8. cent, anguloſque efficiant BEA, BED, DEC, CEA, quorum duo BEA,
Fig. 12. DEC ſint ad verticem oppoſiti, quemadmodum etiam duo BED, AEC. Dico, duos BEA, DEC, ſicuti etiam duos BED, AEC eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

Duo circuli BECF, AEDF ſecentur circulo maximo ABDC illis ad perpendiculum inſiſtente, ſintque rectæ AD, BC communes eorum ſectiones. Cum igitur horum omnium circulorum idem ſit centrum *a* (§. 48.), rectæque AD, BC in eodem plano ABDC conſiſtant, æquales erunt anguli B*a*A, D*a*C ad verticem oppoſiti, quemadmodum etiam anguli A*a*C, B*a*D (*Lib. III.* §. 51.). Igitur arcus quoque BA, DC, nec non arcus AC, BD erunt æquales (*Lib VII.* §. 27.). Eſt autem arcus BA menſura anguli BEA, & arcus DC menſura anguli DEC (§. 34.). Ergo duo anguli BEA, DEC erunt inter ſe æquales. Eadem ratione æquales erunt etiam duo AEC, BED; cum jam oſtenſum ſit, arcus quoque AC, BD eſſe æquales. Itaque anguli ſphærales &c. quod erat &c.

SCHO-

S C H O L I O N.

57. Quod diximus de angulis BEA, DEC, intelligendum est etiam de angulis BFA, DFC. Eadem est enim horum omnium mensura, arcus nimirum BA, DC. Idipsum quoque dicito de angulis BFD, AFC.

THEOREMA VII.

Recta transiens per centrum circuli in sphæra, eique ad perpendiculum incumbens, si utrinque producatur, in illius polos desinit.

58. Recta AC transeat per centrum G circuli BEDF in sphæra ABCD, eique ad perpendiculum incumbat. Producatur autem utrinque, ita ut in sphæræ superficiem desinat, sintque A, C extrema illius puncta. Dico, puncta A, C esse polos ipsius circuli BEDF.

Demonstratio.

In peripheria circuli BEDF sumantur puncta B, E, D, F, ad quæ ducantur a centro G ipsius circuli rectæ GB, GE, GD, GF, & a puncto A rectæ AB, AE, AD, AF. Cum igitur recta AG sit ex hypothesi perpendicularis plano BEDF, perpendicularis quoque erit rectis GB, GE, GD, GF (*Lib. VIII. §.* 2.), eruntque proinde triangula AGB, AGE, AGD, AGF rectangula. Quadratum ergo rectæ AB æquale erit quadratis rectarum AG, GB; quadratum rectæ AE quadratis rectarum AG, GE; quadratum rectæ AD quadratis rectarum AG, GD; & quadratum rectæ AF quadratis rectarum AG, GD; & quadratum rectæ AF quadratis rectarum AG, GF simul sumtis (*Lib. VI. §.* 37.). Quoniam autem rectæ GF, GB, GD, GE sunt æquales (*Lib. VII. §.* 10.), earum quadrata erunt æqualia (*Lib. I. §.* 187.). Illis propterea singulis addito quadrato rectæ AG, quadrata rectarum AG, GB æqualia erunt quadratis rectarum AG, GE; harum quadrata quadratis rectarum AG, GD, & hæc quadratis rectarum AG, GF. Æqualia autem sunt inter se, quæ eidem, vel æqualibus sunt æqualia (*Synop. Alg. §.* 259.). Ergo æqualia inter se erunt quadrata rectarum AB, AE, AD, AF; ac proinde ipsæ quoque AB, AE, AD, AF erunt inter se æquales (*Lib. I. §.* 187;). Eodem modo ostendam, rectas omnes, quæ a puncto A in peripheriam BEDF cadere possunt, æquales esse inter se, quemadmodum etiam eas omnes, quæ a puncto C in eandem peripheriam cadere queunt. Igitur duo puncta A, C sunt poli circuli BEDF (*§.* 6.). Igitur recta transiens &c. quod erat ostendendum. Fig. 14. Tab. 8.

Co:

Corollarium I.

Recta transiens per centrum circuli in sphæra, eique ad perpendiculum incumbens, est axis ipsius circuli.

Fig. 14. Tab. 8. 59. Recta nimirum AC transiens per centrum circuli BEDF in sphæra ABCD eique ad perpendiculum incumbens, est axis ipsius circuli. Ostensum est enim, rectam hujusmodi transire per ipsius circuli polos A, C, in quo axis ratio consistit (§. 9.).

Corollarium II.

Recta in sphæra transiens per centrum ipsius sphæræ, & per centrum circuli in ea positi, est axis ipsius circuli.

Fig. 13. Tab. 8. 60. Ut si centrum sphæræ ACE sit punctum x, & centrum circuli CbE in ea positi sit d, recta AD transiens per utrumque centrum x, d erit axis ipsius circuli CbE. Ostensum est enim, rectam hujusmodi AD ad perpendiculum circulo CbE incumbere (§. 43.).

Corollarium III.

Recta conjungens centra sphæræ, & circuli in ea positi, si utrinque producatur, transit per polos ipsius circuli.

Fig. 13. Tab. 8. 61. Nimirum recta xd conjungens centrum x sphæræ ACE cum centro d circuli CbE in ea positi, si utrinque in directum producta fuerint, transibit per ipsius circuli polos A, D. Cum enim hujusmodi recta AD sit axis circuli CbE (§. 60.), per illius polos transeat necesse est (§. 9.).

Theorema VIII.

Recta ducta ab uno in alterum polum circuli in sphæra, transit per centrum sphæræ, & ipsius circuli, eique ad perpendiculum incumbit.

In sphæra ABCD habeatur circulus BFDE, cujus poli sint duo puncta A, C. Ducatur autem a polo A ad polum C recta AC.

I.

Fig. 11. Tab. 8. 62. Dico primo, rectam AC transire per centrum ipsius circuli, seu punctum a, per quod transit recta AC, esse centum circuli BFDE.

De-

Demonstratio.

In peripheria circuli BFDE sumantur duo puncta B, D, eaque jugantur polis A, C ipsius circuli ope rectarum AB, AD, CB, CD. Insuper a puncto *a* ad ipsa B, D rectæ ducantur *a* B, *a* D. Quoniam igitur puncta A, C sunt poli circuli BFDE, æquales erunt inter se tum rectæ BA, DA, tum rectæ BC, CD (*§. 6.*). Est autem recta AC communis utrique triangulo BAC, DAC. Ergo anguli BAC, DAC erunt inter se æquales (*Lib. V. §. 82.*). Quamobrem si duo spectentur triangula *a*AB, *a*AD, cum duo latera BA, AD sint æqualia, latus A*a* sit commune, & anguli BA*a*, DA*a* æquales itidem sint inter se, basis quoque B*a* erit basi D*a* æqualis (*§. 75.*). Eodem modo ostendam, rectam quamcumque ductam a puncto *a* in peripheriam circuli BFDE esse æqualem uni earum B*a*. Æquales sunt autem inter sæ, quæ eidem rectæ sunt æquales (*Syn. Alg. §. 259.*). Ergo omnes rectæ, quæ a puncto *a* in peripheriam cadunt BFDE, sunt inter se æquales, ac proinde punctum *a* est centrum ipsius circuli BFDE (*Lib. VII. §. 3.*). Igitur recta AC per ipsius circuli centrum transit.

I I.

63. Dico secundo, rectam AC ductam a polo A ad polum C circuli BFDE, ipsi circulo ad perpendiculum incumbere.

Demonstratio.

Per punctum *a*, quod, ut modo demonstravimus, est centrum circuli BFDE, ducatur recta, sive diameter BD, ad cujus extrema B, D ducantur a polo A ipsius circuli rectæ AB, AD. Cum igitur radii *a*B, *a*D æquales sint inter se (*§. 10.*), quemadmodum etiam rectæ AB, AD (*§. 6.*), & recta A*a* sit communis utrique triangulo A*a*B, A*a*D, erit angulus A*a*B angulo A*a*D æqualis (*Lib V. §. 82.*) Duo autem hujusmodi anguli valent duos rectos (*Lib. III. §. 40.*). Ergo uterque A*a*B, A*a*D erit rectus; ac proinde recta A*a* erit ipsi BD perpendicularis (*Lib. III. §. 24.*), sicuti etiam recta C*a* (*§. 53.*). Eodem modo demonstrabitur, rectam AC perpendicularem esse alteri diametro, omnibusque aliis rectis, quæ in eodem plano BFDE per centrum *a* duci possunt. Igitur recta AC ad perpendiculum circulo BFDE incumbit (*Lib. VIII. §. 2.*), adeoque &c.

I I I.

64. Dico tertio, rectam AC transire etiam per centrum ipsius sphæræ ABCD.

De-

Demonstratio.

Si namque circulus BFDE ponatur in sphæra maximus, cum illius centrum *a* diversum tunc non sit a centro ipsius sphæræ (§. 47.), patet propositum. Ostensum est enim, rectam AC transire per centrum ipsius circuli BFDE. Si vero circulus non sit maximus in sphæra, cujusmodi non est circulus BC in sphæra DBC, ac proinde per illius centrum A non transeat, adhuc dico, rectam DE ductam a polo D ad polum E ipsius circuli BC transire per centrum sphæræ BDC. Sit namque, si fieri potest, centrum sphæræ DBC extra rectam DE, sitque illud punctum *d*. Igitur recta *da* ducta a centro *d* sphæræ in centrum *a* circuli BC, per quod, ut modo vidimus, transit recta illius polos conjungens DE, erit plano circulari BC perpendicularis (§. 43.). Ostensum est autem, etiam rectam D*a* esse circulo BC perpendicularem. Ergo duæ rectæ *da*, D*a* plano BC ad punctum *a* perpendiculariter incumbunt. Id autem repugnat (*Lib* VIII. §. 14.). Ergo punctum *d* non est centrum sphæræ DBC. Eodem modo ostendam, nullum aliud punctum extra rectam DE esse centrum ipsius sphæræ DBC. Igitur centrum hujusmodi in ipsa recta DE reperitur; ac proinde recta conjungens polos circuli in sphæra per ipsius sphæræ centrum transit. Itaque recta &c. quod erat ostendendum.

Fig. 14. Tab. 8. — Fig. 15. Tab. 8.

Corollarium I.

Axis cujusvis circuli in sphæra transit per centrum tum sphæræ, tum ipsius circuli, eique ad perpendiculum incumbit.

65. Axis enim circuli cujuscumque in sphæra est recta ducta ab uno in alterum polum ipsius circuli (§. 9.).

Corollarium II.

Axis cujusvis circuli in sphæra est diameter ipsius sphæræ.

66. Diameter namque sphæræ est recta per illius centrum transiens (*Lib.* XI. §. 54.), cujusmodi est axis cujusvis circuli in sphæra, ut modo demonstravimus.

Corollarium III.

Circulus in sphæra transiens per polos alterius in ea circuli, per ejusdem quoque centrum transit.

67. Nimirum circulus ABDF in sphæra ABE transiens per polos A, D circuli BF, per ejusdem quoque circuli centrum transibit. Etenim si transit per polos A, D, axis ipsius circuli BF, nempe recta AD, erit in plano

no

no circuli transeuntis ABDF. Hic autem transit per centrum circuli BF Fig. 14. Tab. 8.
(§. 65.). Ergo per idem centrum transibit quoque circulus ABDF.

COROLLARIUM IV.

Circulus in sphæra, qui per alterius in ea circuli polos transit, bifariam illum dividit.

68. Si nempe circulus ABDF transeat per polos A, D circuli BF, circulum ipsum bifariam dividit. Cum enim circulus ABDF transeat per centrum circuli BF (§. 67.), ita secabit circulum BF, ut communis ipsorum sectio BF per illius centrum transeat. Hæc autem est recta linea (*Lib. VIII. §. 24.*), Fig. 13. Tab. 8.
ipsumque circulum recta hujusmodi bifariam dividit (*Lib.* VII. §. 8.). Ergo circulus ABDF dividit bifariam circulum BF.

COROLLARIUM V.

Circulus in sphæra, qui per alterius polos transit, est in illa maximus.

69. Videlicet circulus ABCE transiens per polos A, D, circuli BF, erit Fig. 12. Tab. 8.
maximus in sphæra ACF. Cum enim recta AD conjungens polos A, D sit in plano circuli ABCE, is erit in sphæra maximus (§. 45.).

COROLLARIUM VI.

Arcus circuli, qui metitur in sphæra distantiam tum circuli a suis polis, tum duorum circulorum eosdem polos habentium a se mutuo, est arcus circuli in ea maximi.

70. Hujusmodi siquidem arcus est arcus circuli transeuntis per illorum circulorum polos (§. 25., & 56.); ac proinde &c.

THEOREMA IX.

Circulus in sphæra, qui per alterius circuli polos transit, orthogonaliter illum secat.

71. Esto in sphæra ABCD circulus BEDF, per cujus polos A, C transeat circulus AECF. Dico, circulum BEDF orthogonaliter dividi a circulo AECF.

Demonstratio.

A polo A ad polum C circuli BEDF, adeoque in plano secantis circuli AECF, ducta intelligatur recta AC. Manifestum est, rectam AC pla- Fig. 14. Tab. 8.
 no

no circuli BEDF, ad perpendiculum incumbere (§. 63.); sique propterea ducatur a puncto G, per quod transit recta AC, in plano circuli BEDF recta GD, angulus AGD erit rectus (*Lib. VIII. §. 2.*). Angulus autem AGD determinat inclinationem semicirculi EAF ad planum BEDF (§. 10.). Ergo semicirculus EAF ad perpendiculum plano circuli BEDF incumbit; totusque proinde circulus AECF circulum BEDF orthogonaliter secat (§. 28.). Circulus ergo in sphæra &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA X.

Si per polos circuli in sphæra quamplures circuli ducantur, omnes illorum arcus inter polum, & peripheriam ipsius circuli intercepti, sunt inter se æquales.

Fig. 14. Tab. 6. 72. Per polos A, C circuli BEDF in sphæra ABCD ducantur duo circuli ABCD, AECF. Dico, arcus AB, AE, AD, AF horum circulorum inter polum A, & peripheriam BEDF comprehensos, quemadmodum etiam arcus CB, CE, CD, CF, qui continentur inter polum C, eandemque peripheriam BEDF, esse inter se æquales.

Demonstratio.

Ducantur a polo A ad puncta B, D in plano circuli ABCD rectæ AB, AD, ad puncta autem E, F in plano circuli AECF, rectæ AE, AF. Quoniam igitur circuli ABCD, AECF sunt in sphæræ maximi (§. 69.), adeoque æquales inter se (§. 51.), rectæ AB, AD, AE, AF erunt chordæ circulorum æqualium. Sunt autem hujusmodi rectæ æquales inter se (§. 6.). Ergo arcus quoque AB, AD, AE, AF sunt inter se æquales (*Lib. VII. §. 38.*). Eodem modo ostendam, arcus quoque CB, CD, CE, CF esse æquales. Igitur, si per polos circuli &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XI.

Omnis circulus in sphæra maximus distat a suis polis quadrante circuli maximi. Et vicissim, qui distat a suis polis quadrante circuli maximi, maximus est.

I.

73. Circulus BEDF sit maximus in sphæra ABCD, ejusque poli sint duo puncta A, C. Dico, circulum BEDF distare a polis A, C quadrante circuli maximi.

De-

Demonstratio.

Ductis namque per polos A, C circulis ABCD, AECF, cum hi sint maximi in ipsa sphæra (§. 69), & bifariam a circulo BEDF, utpote qui maximus est, dividantur (§ 51.), arcus BAD, EAF quemadmodum etiam arcus BCD, ECF, erunt semiperipheriæ circulorum maximorum ABCD, AECF. Circuli autem ABCD, AECF æquales sunt inter se (§. 50.). Ergo eorum quoque arcus BAD, EAF, BCD, ECF erunt æquales (*Lib. I. §.126.*). Sunt autem æquales etiam arcus AB, AE, AD, AF, sicuti etiam arcus CB, CE, CD, CF (§. 72.). Ergo eorum quilibet erit medietas semicirculi, sive quadrans circuli maximi. Metiuntur autem distantiam circuli BEDF a suis polis A, C (§. 70.). Ergo circulus BEDF distat a suis polis quadrante circuli maximi; adeoque &c. Fig. 14. Tab. 8.

II.

74. Vicissim vero circulus BEDF in sphæra ABCD distet a suis polis A, C quadrante circuli maximi, ductis nimirum per ejus polos circulis ABCD, AECF, arcus AB, AE, AD, AF sint quadrantes circuli maximi, quemadmodum etiam arcus BC, EC, DC, FC. Dico, circulum BEDF esse circulum maximum.

Demonstratio.

Cum enim circulus ABCD sit maximus in sphæra (§. 69.), & arcus AB, AD sint ipsius quadrantes per hypothesim, recta BD erit diameter ipsius circuli ABCD. Circulus autem ABCD bifariam dividit circulum BEDF (§. 68.), eorumque communis sectio est recta BD (*Lib. VIII.* §. 24.). Ergo recta BD est diameter etiam circuli BEDF (*Lib. VII.* §. 7.); ac proinde circuli ABCD, BEDF sunt æquales (*Lib.* IX. §. 50.). Est autem circulus ABCD maximus in sphæra ABCD. Ergo circulus quoque BEDF erit in eadem sphæra maximus. Omnis itaque circulus &c. quod erat ostendendum. Fig. 14. Tab. 8.

THEOREMA XII.

Circulus in sphæra maximus alterum in eadem sphæra circulum orthogonaliter secans, bifariam illum secat, & per illius polos transit.

In sphæra ABDF habeatur circulus maximus ABDF, qui circulum CbE in eadem sphæra positum orthogonaliter dividat.

I.

75. Dico primo, circulum maximum ABDF bifariam dividere circulum Fig. 13. Tab. 7.

lum CbE

Demonstratio.

Punctum *x* sit centrum sphæræ, adeoque etiam ipsius circuli ABDF (§.67.). Recta autem CE sit communis sectio circulorum ABDF, CbE (*Lib.* VIII. §.24.). Cum igitur totum planum ABDF ad perpendiculum ex hypothesi insistat plano CbE, potest in ipso plano ABDF duci recta, quæ per centrum *x* ipsius sphæræ transiens, plano CbE ad perpendiculum incumbat (§.2.). Sit ergo AD hujusmodi recta perpendicularis plano CbE. Igitur punctum *d* in circulo CbE, per quod illa transit, erit centrum ipsius circuli CbE (§.42.). Est autem punctum *d* in communi sectione, sive recta CE. Ergo recta CE erit diameter circuli CbE (*Lib.* VII. §.7.). Cumque circuli diameter ipsum bifariam dividat (§.8.), planum, sive circulus ABEF bifariam dividit circulum CbE; adeoque &c.

I I.

76. Dico 2, circulum ABDF transire per polos circuli CbE.

Demonstratio.

Ostensum est, rectam AD, quæ tota est in plano secantis circuli ABEF, per sphæræ centrum transit, & circulo CbE ad perpendiculum incumbit, transire per centrum *d* ipsius circuli CbE. Igitur erit axis ipsius circuli CbE (§.60.); ejusque proinde extrema puncta A, D erunt poli ejusdem circuli CbE (§.61.). Duo autem puncta A, D sunt in peripheria circuli ABDF, quemadmodum tota AD in ejus plano reperitur. Ergo peripheria circuli ABDF transit per polos circuli CbE. Itaque circulus in sphæra maximus &c. quod erat ostendendum.

Fig.13. Tab.8.

THEOREMA XIII.

Si in sphæra circulus maximus transeat per polos alterius circuli in ea maximi, hic vicissim transibit per polos illius.

77. In sphæra ABCD circulus maximus AECF transeat per polos A, C alterius circuli in ea maximi BEDF. Dico, circulum quoque BEDF transire per polos ipsius AECF.

Demonstratio.

Fig.14. Tab.8.

Cum enim circulus AECF transeat per polos A, C circuli BEDF, ipsum circulum BEDF orthogonaliter secabit (§.71.), ac proinde vicissim circulus AECF orthogonaliter secabitur a circulo BEDF. Est autem circulus BEDF maximus in ipsa sphæra ABCD per hypothesim. Ergo circulus BEDF tran-

transibit per polos ipsius circuli AECF (§. 76.). Itaque si in sphæra circulus maximus &c. quod erat ostendendum.

Corollarium.

Si duo circuli in sphæra maximi sese mutuo secent in polis alterius circuli maximi, is per omnium illorum polos transibit.

78. Ut si duo puncta E, F, in quibus sese mutuo secant duo circuli in sphæra maximi AEDF, BECF, fuerint poli alterius circuli in ea maximi ABDC, peripheria circuli ABDC transibit per polos ipsorum AEDF, BECF. Cum enim circulus AEDF transeat per polos circuli ABDC, & uterque sit maximus, poli circuli AEDF erunt in circulo ABDC. Eadem ratione in eodem circulo ABDC erunt poli circuli BECF; cum is quoque per polos ipsius circuli ABDC transeat. Ergo poli utriusque circuli AEDF, BECF in circulo ABCD reperiuntur; adeoque &c. Fig. 12. Tab. 8.

Theorema XIV.

Circulus in sphæra maximus alterum in ea non maximum bifariam secans, orthogonaliter ipsum secat, & per illius polos transit.

In sphæra ABEF circulus maximus ABEF alterum in illa non maximum CbE bifariam dividat.

I.

79. Dico primo, circulum ABEF orthogonaliter secare circulum CbE.

Demonstratio.

Enimvero, cum planum circuli ABEF bifariam dividat circulum CbE, transibit per illius centrum *d*. Cumque centrum sphæræ ABF sit etiam centrum ipsius circuli ABEF (§. 46.), recta *xd* ducta a centro *x* sphæræ ad centrum *d* circuli CbE, erit in plano ipsius circuli ABEF. Est autem recta *xd*, sive tota AD perpendicularis plano CbE circuli (§ 43.). Ergo planum quoque circuli ABEF erit plano circuli CbE perpendicularis (*Lib. VIII. §.7.*), ipsumque proinde circulum CbE orthogonaliter secabit (§. 28.), Fig 13. Tab. 8.

I I.

80. Dico 2., peripheriam circuli ABEF transire per polos circuli CbE;

Demonstratio.

Ostensum est, rectam AD, quæ transit per centrum *d* circuli C*b*E, ad perpendiculum ipsi circulo incumbere. Transibit ergo recta AD per polos ipsius circuli C*b*E, extrema nimirum illius puncta A, D erunt poli circuli C*b*E (§. 61.). Per hujusmodi autem puncta A, D transit peripheria circuli ABEF; cum tota AD in hujusce circuli plano consistat. Ergo circulus ABEF transit per polos circuli C*b*E, quem bifariam dividit. Itaque circulus in sphæra &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XV.

Si duo circuli in sphæra maximi sese mutuo oblique secent, distantia polorum eorundem erit angulo obliquitatis æqualis.

Fig. 12. Tab. 8. 81. Duo circuli in sphæra maximi BECF, AEDF sese mutuo in ea oblique secent. Sintque M, L poli circuli BECF, & H, N poli circuli AEDF; qui omnes erunt in peripheria ejusdem circuli maximi ABC, cujus poli sunt puncta sectionum E, F (§. 77.). Dico, distantiam poli M a polo N, & poli L a polo H, æqualem esse arcui, qui metitur angulum obliquitatis BEA ipsorum circulorum BECF, AEDF.

Demonstratio.

Cum enim circulus ABC transeat per polos M, L circuli BECF, simulque per polos N, H circuli AEDF, mensura anguli obliquitatis BEA erit arcus BA, & mensura anguli ad verticem oppositi DEC erit arcus DC ipsius circuli maximi ABC (§. 34.). Quoniam igitur punctum N est polus circuli AEDF, arcus AN erit quadrans circuli ABC (§. 73.). Eadem ratione, cum punctum M sit polus circuli BECF, arcus MB erit quadrans ejusdem circuli ABC. Omnes autem quadrantes ejusdem circuli sunt æquales. Ergo arcus AN æqualis erit arcui MB; sublatoque proinde communi arcu AM, erit reliquus MN reliquo AB æqualis (*Syn. Alg.* §. 266.). Eodem modo ostendam, arcum HL æqualem esse arcui DC. Igitur distantia poli M a polo N æqualis est arcui BA, qui metitur angulum obliquitatis BEA, & distantia poli H a polo L arcum adæquat DC, qui angulum quoque metitur DEC eorundem circulorum BECF, AEDF. Itaque si duo circuli &c. quod erat ostendendum.

Co-

COROLLARIUM.

Si duo circuli in sphæra maximi sese mutuo oblique secent; eadem erit distantia polorum eorundem inter se mutuo.

82. Ut si puncta H, N sint poli circuli maximi AEDF, & puncta M, L poli circuli itidem maximi BECF, oblique alterum AEDF in sphæra secantis, distantia poli N a polo M æqualis erit distantiæ poli H a polo L. Cum enim anguli obliquitatis BEA, DEC, utpote ad verticem oppositi, sint æquales (§. 56.), æquales erunt arcus BA, DC, qui sunt illorum mensura. Constat autem, arcum BA æqualem esse arcui MN, & arcum DC arcui HL, qui distantiam metiuntur polorum M, N * H, L a se mutuo. Ergo arcus quoque MN, HL sunt inter se æquales (*Syn. Alg.* §. 259.); adeoque &c. Fig. 12. Tab. 8.

THEOREMA XVI.

Circuli in sphæra æquales æqualiter ab illius centro distant: Et vicissim; qui æqualiter a sphæræ centro distant, sunt æquales.

I.

83. In sphæra ABDF duo habeantur circuli æquales B*a*F, C*b*E. Dico, eos æqualiter distare a centro *x* ipsius sphæræ.

Demonstratio.

Cum enim circuli B*a*F, C*b*E æquales sint inter se, eorum diametri BF, CE erunt æquales (*Lib. IX.* §. 50.). Rectæ autem in sphæra æquales æqualiter ab illius centro distant (*Lib. XI.* §. 118.). Ergo eadem erit distantia utriusque diametri BF, CE a centro sphæræ *x*. Manifestum porro est, rectas BF, CE transire per centra *a*, *d* circulorum B*a*F, C*b*E (*Lib. VII.* §. 7.). Ergo eadem quoque erit distantia utriusque centri *a*, *d* a centro sphæræ *x* (*Lib. V.* §. 71.); adeoque etiam ipsorum circulorum B*a*F, C*b*E (§. 27.). Quippe hoc ipso rectæ *xa*, *xd* ductæ a centro sphæræ *x* in ipsa centra *a*, *d* sunt æquales. Æquales itaque circuli &c. Fig. 13. Tab. 8.

II.

84. Vicissim verò duo circuli B*a*F, C*b*E æqualiter distent a centro *x* sphæræ ABDF. Dico, illos esse inter se æquales.

Demonstratio.

Etenim; cum eadem sit distantia utriusque ciculi *BaF*; *CbE* à centro sphæræ *x*, rectæ *xa*, *xd* ductæ a centro ipsius sphæræ in centra circulorum *a*, *d* erunt æquales (§. 27.). Quamobrem diametri *BF*, *CD* ipsorum circulorum *BaF*, *CbE* æqualiter distabunt a centro *x* sphæræ (*Lib. IX. §. 68.*). Rectæ namque *xa*, *xd* ad perpendiculum ipsis *BF*, *CE* insistunt (*Lib. VIII. §. 2.*), cum ad perpendiculum incumbant planis circularibus *BaF*, *CbE* (§. 27.). In sphæra autem rectæ illæ æquales sunt inter se, quæ æqualiter ab illius centro distant (*Lib. XI. §. 118.*). Ergo diametri *BF*, *CE*, ac proinde ipsi quoque circuli *BaF*, *CbE*, sunt æquales (*Lib. IX. §. 50.*). Itaque in sphæra circuli &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XVII.

Circuli in sphæra eo minores sunt, quo magis ab illius centro distant.

85. In sphæra AC sint duo circuli *DE*, *BC* inæqualiter ab illius centro *F* distantes, sit nimirum distantia circuli *BC* major; minor vero distantia circuli *DE*. Dico, circulum *BC* circulo *DE* minorem esse.

Demonstratio.

Cum enim distantia circuli *BC* a centro sphæræ *F* distantiam superet circuli *DE* ab eodem centro, si a centro sphæræ *F* ducantur in centra *a*, *b*
Fig. 1. ipsorum circulorum rectæ *Fa*, *Fb*, recta *Fa* major erit recta *Fb* (§. 44.).
Tab. 9. Sunt autem rectæ *Fa*, *Fb* perpendiculares ipsis circulis *BC*, *DE* (§. 43.), adeoque etiam eorum diametris *BC*, *DE* (*Lib. VIII. §. 2.*). Ergo distantia rectæ *BC* a centro *F* major erit, quam distantia rectæ *DE* ab eodem centro (§. 27.). In sphæra autem illa recta linea minor est, quæ magis ab ipsius sphæræ centro distat (*Lib. XI. §. 119.*). Ergo recta *BC* minor erit recta *DE*. Est autem recta *BC* diameter circuli *BC*, & recta *DE* diameter circuli. *DE*. Ergo circulus *BC* minor erit circulo *DE* (*Lib. IX. §. 50.*). Itaque circuli &c. quod erit ostendendum.

COROLLARIUM.

Circuli in sphæra eo minores sunt, quo illius polis sunt viciniores.

86. Quo namque viciniores sunt illius polis, eo magis ab ipsius sphæræ centro distant.

THEO-

THEOREMA XVIII.

Circuli in sphæra paralleli eosdem polos habent. Et vicissim circuli in sphæra eosdem polos habentes, sunt paralleli.

I.

87. In sphæra *ABDF* sint duo circuli paralleli *BF*, *CE*, sintque duo puncta A, D *poli* circuli *BF*. Dico hujusmodi puncta A, D *polos* quoque esse circuli *CE*.

Demonstratio.

Cum enim recta AD conjungens *polos* circuli BF ad perpendiculum incumbat plano circuli BF (§. 63.) plano quoque circuli CF erit perpendicularis (*Lib. VIII.* §. 28.). Transit autem per centrum sphæræ ABCF (§. 64.). Ergo transibit quoque per centrum circuli CE (§ 42.); desinetque proinde utrinque producta in polos ipsius circuli CE (§. 61.). Desinit autem in puncta A, D. Ergo hujusmodi puncta erunt poli circuli CE. Sunt autem poli etiam circuli BF per hypothesim. Igitur circulorum BF, CE iidem sunt poli A, D; adeoque &c. Fig. 13. Tab. 8.

I I.

88. Vicissim vero circulorum BF, CE iidem sint poli A; D. Dico; circulos BF, CE esse parallelos.

Demonstratio.

Cum utriusque circuli BF, CE iidem ex hypothesi sint poli A; D; idem quoque erit utriusque axis AD (§. 12.). Axis autem cujusvis circuli in sphæra plano ipsius circuli ad perpendiculum incumbit (§. 65.). Ergo recta AD perpendicularis erit plano utriusque circuli BF, CE. Illa autem plana sunt inter se parallela, quibus eadem recta linea perpendiculariter insistit (*Lib. VIII.* §. 25.). Ergo circuli BF, CE sunt inter se paralleli. Itaque circuli &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Circuli in sphæra paralleli eundem axim habent.

89. Cum enim horum circulorum iidem sint poli, idem quoque erit axis (§. 12.).

Co-

COROLLARIUM II.

Circuli in sphæra, quorum idem est axis, sunt inter se paralleli.

90. Idem enim nequit esse circulorum axis, quin iidem itidem sint eorum poli (§. 9.).

COROLLARIUM III.

Si poli sphæræ sint etiam poli unius circuli in ea descripti, erunt etiam poli omnium circulorum, qui sunt illi paralleli.

91. Ostensum enim est, omnes circulos in sphæra parallelos habere eosdem polos.

COROLLARIUM IV.

Si axis sphæræ si etiam axis unius circuli in illa descripti, erit etiam axis omnium illorum circulorum, qui sunt illi paralleli.

92. Omnium siquidem circulorum in sphæra perallelorum idem est axis (§. 89.).

COROLLARIUM V.

Omnes circuli in sphæra, quorum poli diversi non sunt a polis sphæræ, sunt inter se paralleli.

93. Omnes enim hoc ipso habent eosdem polos. Ergo sunt paralleli.

COROLLARIUM VI.

Omnes circuli in sphæra, quorum axis diversus non est ab axe sphæræ, sunt inter se paralleli.

94. Idem siquidem tunc est omnium axis.

COROLLARIUM VII.

Circuli in sphæra æqualiter distantes ab illius polis sunt inter se paralleli.

95. Ut si duo circuli BF, CE in sphæra ABDF distantes ex æquo fue-
Fig. 53. rint ab illius polis A, D, erunt inter se paralleli. Hi namque circuli ha-
Tab. 8. bent hoc ipso eosdem polos A, D (§. 19.).

THEO-

THEOREMA XIX.

Circulus in ſphæra maximus tranſiens per polos unius circuli in ipſa ſphæra, biſariam atque orthogonaliter omnes dividit circulos, qui ſunt ei paralleli.

96. Circulus ABCD maximus in ſphæra ABCD tranſeat per polos A, C circuli BFDE. Dico, circulum ABCD biſariam, & orthogonaliter dividere circulum GH circulo BFDE parallelum. Fig. 11. Tab. 9.

Demonſtratio.

Cum enim circuli BFDE, GH ſint paralleli, iidem erunt ipſorum poli A, C (§. 87.). Tranſiens propterea circulus ABCD per polos circuli BFDE, tranſibit etiam per polos circuli GH. Circulus autem in ſphæra maximus tranſiens per polos unius in ea circuli, ipſum biſariam, & orthogonaliter dividit (§. 71. 75.). Ergo circulus ABCD biſariam, & orthogonaliter ſecat circulum GH, omneſque alios eandem ob cauſam, qui ſunt circulo BFDE paralleli. Itaque circulus &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XX.

Circuli in ſphæra paralleli intercipiunt æquales arcus circulorum maximorum, qui per illorum polos tranſeunt.

97. In ſphæra ABE habeantur duo circuli paralleli DE, BC, per quorum polos A, G tranſeant duo circuli maximi ABGE AdGm. Dico, horum maximorum circulorum arcus BD, de, EC, mn, quos duo ipſi circuli paralleli DE, BC, intercipiunt, eſſe inter ſe æquales. Fig. 1. Tab. 9.

Demonſtratio.

Cum enim circuli ABGE, AdGm ſint per hypotheſim in ſphæra maximi, æquales erunt inter ſe (§. 51.). Sunt autem ipſorum arcus AD, AE, Am, Ad inter ſe æquales, ſicuti etiam arcus GB, GC, Ge, Gn (§. 72.); cum puncta A, G ſint poli circulorum DE, BC. Ergo, illis ablatis, qui ſuperſunt, arcus DB, EC, de, mn erunt quoque inter ſe æquales (*Syn. Algeb.* §. 366.). Itaque circuli &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXI.

Circuli in fphæra æqualiter diftantes a polis ipfius fphæræ funt inter fe æquales.

98. In fphæra ABDF duo habeantur circuli BF, CE qui æqualiter diftent a polis A, D ipfius fphæræ. Dico, illos effe inter fe æquales.

Demonftratio.

Quoniam utriufque circuli BF, CE iidem funt poli A, D (§. 19.), ducantur per polos ipfos A, D circulus ABDF, qui erit in ipfa fphæra maximus (§. 169.). Tum in plano ipfius circuli a polo A ad peripheriam
Fig. 13. Tab. 8. circuli BF ducantur rectæ AB, AF, quemadmodum etiam a polo D ad peripheriam circuli CE rectæ DC, DE. Quoniam igitur diftantia circuli BF a polo A æqualis eft diftantiæ circuli CE a polo D, rectæ AB, AF æquales erunt tum inter fe (§. 14.), tum rectis DC, DE (§. 17.). In circulo autem æquales rectæ æquales arcus fubtendunt (*Lib. VII. §.* 37.). Ergo arcus AB, AF, DC, DE, atque adeo etiam arcus BAF, CDE, erunt inter fe æquales. In eodem autem circulo æqualium arcuum æquales funt chordæ (§. 38.). Igitur rectæ BF, CE erunt æquales. Conftat porro, rectas BF, CE effe diametros circulorum BF, CE; cum circulus maximus ABDF bifariam dividat utrumque circulum BF, CE, ac proinde per illorum centrum tranfeat (§. 75.). Ergo circuli BF, CE funt æquales (*Lib.* IX. 50.). Itaque circuli &c. quod erat oftendendum.

THEOREMA XXII.

Si duo circuli in fphæra maximi fefe mutuo ad angulos rectos fecuerint, quemlibet circulum circa puncta fectionum defcriptum in quatuor æquales partes dividunt.

Fig. 14. Tab. 8. 99. Duo circuli in fphæra maximi ABCD, AECF fefe mutuo dividant ad angulos rectos in punctis A, C. Defcribatur autem circa punctum fectionis A circulus BEDF. Dico, circulum ipfum BEDF, in quatuor æquales partes dividi a circulis ABCD, AECF.

Demonftratio.

Cum enim circulus BEDF defcriptus fit circa punctum A, duo fectionum puncta A, C erunt poli ipfius circuli (§. 7.); cumque per ipfos tranfeant circuli ABCD, AECF, ambo quoque tranfibunt per centrum G ipfius circuli (§. 67.); eruntque propterea communes fectiones, five rectæ BD, EF, diametri ejufdem circuli BEDF (*Lib. VII. §.* 7).

Duo

Duo autem circuli ABCD, AECF ſeſe mutuo ſecant ad angulos rectos. Ergo recti, ac proinde æquales inter ſe, erunt quatuor anguli BGF, EGE, EGD, FGD, quos in centro G circuli BEDF rectæ BD, EF conſtituunt. Quamobrem circulus BEDF in quatuor quadrantes ſectus erit a duobus circulis ABCD, AECF. Itaque ſi duo circuli &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXIII.

Si per polos plurium circulorum parallelorum ſphæræ ducantur duo circuli maximi, arcus ipſorum circulorum inter maximorum peripherias comprehenſi, ſunt ſibi mutuo ſimiles.

100. In ſphæra ACDE habeantur duo circuli paralleli B*n*F. C*m*E, per quorum polos A, D tranſeant duo circuli maximi ACDE, A*m*D*e*. Dico arcus B*n*, C*m* circulorum parallelorum B*n*F, C*m*E inter illos maximos circulos comprehenſos, eſſe ſibi mutuo ſimiles. Fig. 2. Tab. 9.

Demonſtratio.

Cum enim circuli B*n*F, C*m*E ſint paralleli, rectæ B*a*, C*x* erunt parallelæ, ſicuti etiam rectæ *na*, *mx* (*Lib. VIII. §. 26.*). Rurſus cum recta AD ad perpendiculum utrique circulo B*n*F, C*m*E incumbat (§. 65.), & per eorum centrum tranſeat (§. 62.), utpote quæ eſt utriuſque circuli axis (§. 89.), tam rectæ B*a*, C*x*, quam rectæ *na*, *mx* erunt ipſi AD perpendiculares; ac proinde anguli B*an*, C*xm* erunt inter ſe æquales (*Lib.* VIII. §. 29.). Eſt autem angulus B*an* in centro circuli BF, & angulus C*xm* in centro circuli CE. Ergo arcus B*n*, C*m* erunt ſibi mutuo ſimiles (*Lib.* IX. §. 134.). Itaque ſi per polos &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXIV.

Duo circuli in ſphæra maximi ſeſe mutuo ſecantes ad angulos rectos, circulum maximum oblique ſe habentem ad puncta ſectionum, atque per polos unius ex illis tranſeuntem, in quatuor æquales partes dividunt.

101. In ſphæra ABDC ſpectentur duo circuli maximi ſeſe mutuo ſecantes ad angulos rectos ABDC, AEDF in punctis A, D. Per polos autem E, F circuli ABDC tranſeat circulus itidem maximus BECF, oblique ſe habens ad puncta ſectionum A, D. Dico circulum BECF in quatuor æquales partes dividi ab ipſis circulis ABDC, AEDF. Fig. 12. Tab. 8.

De-

Demonstratio.

Cum enim puncta E, F sint poli circuli ABDC, eorum distantia a peripheria ipsius circuli æquabit quadrantem circuli maximi (§. 73.). Ergo quilibet arcus EB, EC, FB, FC erit quarta pars peripheriæ circuli BECF; atque adeo circulus BECF sectus erit in quatuor quadrantes a duobus circulis ABDC, AEDF. Duo itaque circuli &c. quod erat ostendendum.



ELE-

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM
LIBER XIII.
De similitudine, & ratione solidorum.

UT, quæ de *solidorum similitudine*, & *ratione* dicturi sumus, animum evidentius subeant, memoria repetantur, quæ lib. XI. *solidorum genesi* demonstravimus.

DEFINITIO I.

1. *Solida similia dicuntur illa, quæ planis numero æqualibus, sibique mutuo similibus continentur*. Sic duo prismata trilatera AF, *af*, quemadmodum etiam duæ pyramides itidem trilateræ DMF, *dmf*, sunt corpora similia; quia plana, quibus terminantur, numero æqualia sunt, & inter se similia, nimirum planum ADFC simile est plano *adfc*, planum ADEB plano *adeb*, planum BEFC plano *befc*, planum DEF, plano *def*, & planum ABC plano *abc*. In pyramidibus quoque DME, *dme* similes sunt sibi mutuo bases DEF, *def*, sicuti etiam trangula *DMF dmf* * *DME*, *dme* * *EMF*, *emf*. Fig. 3. Fig 4. Tab. 9.

COROLLARIUM I.

2. *Anguli solidorum similium, quos homologa plana constituunt, sunt inter se æquales*. Hi namque planis figura similibus, & numero æqualibus continentur.

COROLLARIUM II.

3. *Omnia corpora regularia ejusdem generis sunt sibi mutuo similia*. Etenim plana, quibus regulare corpus clauditur, æqualia sunt, & regularia (*Lib. XI. §. 10.*). Omnes autem figuræ planæ regulares ejusdem generis sunt sibi mutuo similes (*Lib.* IX. §. 3.). Ergo omnia solida regularia ejusdem generis sunt sibi mutuo similia (§. 1.).

COROLLARIUM III.

4. *Omnes cubi, omniaque tetrahedra, octahedra, dodecaedra, & icosaedra sunt respective inter se similia*. Omnia enim sunt corpora regularia (*Lib.* XI. §. 10.).

Co-

COROLLARIUM IV.

5. *Quodlibet latus solidi regularis est homologum cuilibet lateri alterius solidi regularis ejusdem generis.* Omnia enim plana, quibus corpus regulare terminatur, regularia sunt, & inter se æqualia (§. 10), ac proinde lateribus æqualibus terminata (*Lib. V.* §. 20.). Quodlibet autem latus figuræ regularis est homologum cuilibet lateri alterius figuræ regularis ejusdem generis (*Lib.* IX. §. 4.). Ergo &c.

DEFINITIO II.

6. *Duo cylindri, sicuti etiam duo coni, suis basibus similiter inclinati dicuntur, cum ipsorum axes suis basibus sub æquali angulo insistunt.* Sic duo cylindri *CFMD*, *cfmd*, quemadmodum etiam duo coni *COD*, *cod*, similiter inclinati sunt basibus *CD*, *cd*; quia æquales sunt anguli *OED*, *oed*, sub quibus ipsorum axes *OE*, *oe* basibus *CD*, *cd* incumbunt.

Fig. 5. Fig. 6. Tab. 9.

DEFINITIO III.

7. *Similes coni, & cylindri sunt illi, quorum axes eandem ad basium diametros, sive radios rationem habent, ipsisque basibus sunt similiter inclinati.* Similes nimirum erunt cylindri *ACDB*, *acdb*, sicuti etiam cylindri *FCDM*, *fcdm*, si sub eodem angulo ipsorum axes *NE*, *ne*, aut *OE*, *oe* suis basibus *CD*, *cd* institerint, fueritque axis *NE* ad radium *ED* basis *CD*, ut axis *ne* ad radium *ed* basis *ed*, similiter axis *OE* ad radium *ED*, ut axis *oe* ad radium *ed*. Idipsum dicito de conis *CND*, *cnd* * *COD*, *cod*.

Fig. 5. Fig. 6. Tab. 9.

COROLLARIUM I.

8. *In conis, & cylindris similibus axes sunt directe inter se, ut suarum basium diametri, & semidiametri.* Ut si cylindrus ACDB similis fuerit cylindro *acdb*, axis NE erit ad axim *ne*, ut est radius ED basis CD ad radium *ed* basis *cd*, sicuti etiam ut diameter CD ad diametrum *cd*. Similiter si coni COD, *cod* similes inter se fuerint, erit axis OE ad axim *oe*, ut est radius ED basis CD ad radium *ed* basis *cd*, utque diameter CD ad diametrum *cd*. Etenim ob similitudinem ipsorum corporum erit axis NE ad radium ED, ut axis *ne* ad radium *ed*, sicuti etiam axis OE ad radium ED, ut axis *oe* ad radium *ed* (§. 7.). Ergo *alternando* erit quoque axis NE ad axim *ne*, & axis OE ad axim *oe*, ut est radius ED ad radium *ed* (*Lib. I.* §. 125.); cumque sit diameter CD ad diametrum *cd*, ut est radius ED ad radium *ed* (§. 127.), erit quoque axis NE ad axim *ne*, & axis OE ad axim *oe*, ut est diameter CD ad diametrum *cd* (§. 78).

Fig. 5. Fig. 6. Tab. 9.

Co-

Corollarium II.

9. *Si unus duorum cylindrorum, vel conorum ſimilium rectus fuerit, alter quoque eorundem rectus erit.* Cum enim ſint ſibi mutuo ſimiles, ſuis baſibus ſimiliter incumbunt.

Definitio IV.

10. *Sphæra dicitur polyedro circumſcripta, cum ejus ſuperficies tranſit per apices omnium ſolidorum angulorum ipſius polyedri, & viciſſim polyedrum hac ratione in ſphæra conſiſtens, illi inſcriptum vocatur.* Sic ſphæra ABC dicitur circumſcripta polyedro ABC, & viciſſim polyedrum ABC ſphæræ ABC inſcriptum. Fig. 9. Tab. 9.

Definitio V.

11. *Sphæra vero dicitur polyedro inſcripta, & viciſſim polyedrum ſphæræ circumſcriptum nuncupatur, cum ipſius ſphæræ ſuperficies omnia plana tangit, quibus polyedrum ipſum comprehenditur.* Sic ſphæra DEF inſcripta eſt polyedro DEF, & viciſſim polyedrum DEF eſt ſphæræ DEF circumſcriptum. Fig. 9. Tab. 9.

Definitio VI.

12. *Centrum polyedri regularis eſt punctum ſumtum in illius area, quod eſt centrum tam ſphæræ illi circumſcriptæ, vel circumſcriptibilis, quam illi inſcriptæ, vel inſcriptibilis.* Hujuſmodi eſt in polyedro ABC punctum Z. Eſt enim centrum tam ſphæræ illi circumſcriptæ ABC, quam inſcriptæ DEF. Fig. 9. Tab. 9.

Definitio VII.

13. *Radius polyedri regularis eſt recta quæcunque linea ducta ab illius centro ad apices omnium ſolidorum angulorum, quos polyedrum ipſum continet.* Sic rectæ ZA, ZM in polyedro regulari ACE ductæ ab illius centro Z ad apices ſolidorum angulorum A, M, ſunt illius radii. Fig. 7. Tab. 9.

Corollarium I.

14. *Radius polyedri regularis ſphæræ inſcripti eſt radius ipſius ſphæræ.* Eſt enim recta ducta a ſphæræ centro ad illius ſuperficiem; cum idem ſit utriuſque ſolidi centrum (§. 12.), & ſphæræ ſuperficies per apices ſolidorum angulorum ipſius polyedri tranſeat (§ 10.).

COROLLARIUM II.

15. *Omnes radii polyedri regularis sunt inter se æquales*. Diversi namque non sunt a radiis circumscriptæ sphæræ (§. 14.), qui omnes sunt æquales (*Lib. XI.* §. 56.).

COROLLARIUM III.

16. *Radius polyedri regularis sphæræ circumscripti est major semidiametro ipsius sphæræ*. Cum enim apices angulorum circumscripti polyedri extra inscriptæ sphæræ superficiem positi sint (§. 50.), radii ipsius polyedri extra sphæræ superficiem excurrunt.

DEFINITIO VIII.

17. *Catetus, sive radius rectus polyedri regularis est recta ducta ab illius centro ad unum planorum, quibus clauditur, eique perpendiculariter insistens.*
Fig. 7. Tab. 9. Ut si recta ZN ducta a centro Z polyedri regularis ACE ad planum AMF, illi ad perpendiculum institerit, recta ZN erit *catetus*, sive *radius rectus* polyedri ACE.

COROLLARIUM I.

18. *Catetus polyedri regularis est recta minor ejusdem radio*. *Catetus* nempe ZN polyedri ACE est minor radio ZA ipsius polyedri. Cum enim *catetus* ZN perpendiculariter insistat plano AMF, minima est omnium rectarum, quæ ab eodem centro Z in idem planum AMF cadere possunt (*Lib. VIII.* §. 16.)
Fig. 7. Tab. 9.

COROLLARIUM II.

19. *Catetus polyedri regularis sphæræ inscripti est minor semidiametro ipsius sphæræ*. Est enim minor ipsius polyedri radio (§. 18.), qui ab ejusdem sphæræ radio diversus non est (§. 17.).

COROLLARIUM III.

20. *Cateti polyedri regularis sunt altitudines pyramidum, in quas polyedrum quodcunque resolvitur*. Sic catetus ZN polyedri ACE est altitudo pyramidis AZMF, quæ est una ex illis, in quas polyedrum ipsum resolvi potest. Recta namque ZN est perpendicularis ducta a vertice Z ipsius pyramidis in ejusdem basim AMF.
Fig. 7. Tab. 9.

Co-

COROLLARIUM IV.

21. *Catetus polyedri regularis sphæræ circumscripti est radius sphæræ inscriptæ*. Nimirum *catetus* Z*a* polyedri regularis ABC sphæræ DEF circumscripti diversus non est a radio ipsius sphæræ. Etenim recta, sive radius Z*a* sphæræ DEF ductus a centro Z ad punctum *a*, in quo ipsa sphæra inscripta tangit faciem A*a* circumscripti polyedri ABC, est ipsi plano perpendicularis (*Lib. XI. §.* 122.). Fig. 9. Tab. 9.

COROLLARIUM V.

22. *Catetus polyedri regularis sphæræ circumscripti est minor cateto polyedri eidem sphæræ inscripti*. Etenim *catetus* polyedri sphæræ circumscripti est radius ipsius sphæræ (§. 21.). *Catetus* autem polyedri inscripti est minor radio sphæræ (§ 19.). Ergo minor quoque est *cateto* circumscripti polyedri.

COROLLARIUM VI.

23. *Omnes cateti polyedri regularis sunt inter se æquales*. Sunt namque radii inscriptæ sphæræ (§. 21.).

COROLLARIUM VII.

24. *Altitudines omnium pyramidum, in quas polyedrum regulare resolvi potest, sunt omnes inter se æquales*. Harum enim pyramidum altitudines sunt *cateti* ipsius polyedri (§. 17.); cum earum quælibet sit recta perpendicularis ducta a vertice in basim.

THEOREMA I.

Si pyramis secetur plano basi parallelo, pyramis truncata erit similis toti pyramidi.

25. Pyramis ABCD secetur plano *abc* basi BCD parallelo. Dico, pyramidem truncatam A*abc* similem esse toti pyramidi ABCD. Fig. 1. Tab. 8.

Demonstratio.

Cum enim plana *abc*, BCD sint parallela, sectiones CD, *bc* erunt rectæ parallelæ (*Lib. VIII. §.* 26.). Igitur triangulum *b*A*c* simile erit triangulo CAD (*Lib. XI. §.* 65.). Eadem ratione triangulum *a*A*b* simile erit triangulo BAC, & triangulum *a*A*c* triangulo BAD. Est autem etiam sectio *abc* similis basi BCD (§. 88.). Ergo duæ pyramides A*abc*, ABCD similibus planis, & quidem numero æqualibus continentur; atque adeo sunt sibi mutuo similes (§. 1.).

THEOREMA II.

Si conus secetur plano basi parallelo, conus truncatus erit similis toti cono.

26. Conus *bad* secetur plano *mn* basi *bd* parallelo. Dico, conum truncatum *man* similem esse toti cono *bad*.

Demonstratio.

Secetur conus plano per verticem *a*, & per centrum *e* basis traducto; ut proinde axis *ae* in ipso plano sectionis consistat, ipsumque planum per centrum *z* transeat sectionis *mn*. Quoniam igitur sectio *mn* est circulus
Fig. 8. (*Lib* XI §. 91.), & quidem parallelus basi *bd*, communes sectiones, sive
Tab. 8. rectæ *mn*, *bd* erunt parallelæ (*Lib.* VIII. §. 26.); cumque planum secans per centrum utriusque circuli *mn*, *bd* transeat, rectæ *bd*, *mn* erunt ipsorum circulorum diametri. Rursus cum sectio *bad* sit triangulum planum rectilineum (*Lib.* XI. §. 98.), & recta *mn* sit basi *bd* parallela, si spectetur triangulum *ead*, erit $ea.za = ed.zn$ (*Lib.* IX. §. 59.). Est autem *ed* semidiameter basis *bd* coni *bad*, & recta *zn* semidiameter basis *mn* coni *man*; recta vero *ae* est axis prioris coni, & recta *az* axis posterioris. Ergo axes conorum *bad*, *man* sunt inter se, ut eorundem basium radii. Sunt autem coni ipsi suis basibus similiter inclinati (§. 6.); cum æquales sint anguli inclinationis *azn*, *aed* (*Lib.* IV. §. 14.). Ergo duo coni *man*, *bad* sunt sibi mutuo similes (§. 8.). Itaque si conus &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA III.

Pyramides æqualium basium, & altitudinum sunt inter se æquales.

27. Duæ pyramides *abcd*, ABCD habeant æquales bases *bcd*, BCD, & altitudines *an*, AN. Dico, eas esse inter se æquales.

Demonstratio.

Cum enim eadem sit altitudo utriusque pyramidis, idem erit in utraque componentium elementorum numerus (*Lib.* XI. §. 103.). Hæc insuper ele-
Fig. 3. menta sunt in utraque pyramide *respective* inter se æqualia, videlicet æ-
Fig. 4. qualia sunt inter se, quæ in eadem altitudine sumuntur, ut *efK*, EFK;
Tab. 8. cum sectiones, quibus determinantur, sint inter se æquales (*Lib.* IX. §. 53.). Ergo pyramides *abcd*, ABCD sunt inter se æquales (*Lib.* XI. §. 72.). Itaque pyramides &c. quod erat ostendendum.

Co-

COROLLARIUM.

Coni æqualium basium, & altitudinum sunt æquales.

28. Sunt enim pyramides infinitorum laterum (*Lib. XI. §. 72.*).

THEOREMA IV.

Omnis pyramis est tertia pars prismatis habentis eandem basim, & altitudinem.

I.

29. Esto primo prisma triangulare EBC; cujus altitudo sit recta FD: Sub æquali autem altitudine *ae* habeatur pyramis trilatera *abcd*, cujus basis *bcd* sit æqualis basi BCD ipsius prismatis. Dico, prisma EBC triplum esse pyramidis *abcd*.

Demonstratio.

Secetur prisma EBC plano transeunte per punctum A; & per rectam BD, tum plano per idem punctum A, & per puncta E, D traducto, ita nimirum ut sectio sit diagonalis ED parallelogrammi EBDF. Divisum erit prisma in tres pyramides triangulares BADC, BADE, EADF. Quoniam igitur altitudo pyramidis BADC diversa non est ab altitudine prismatis, adeoque etiam pyramidis *abcd*, pyramides BADC, *abcd* æqualem habebunt altitudinem. Habent autem etiam æquales bases BCD, *bcd* per hypothesim. Ergo pyramides BADC, *abcd* æquales erunt (§. 27.). Rursus cum planum BEAC sit parallelogrammum (*Lib. XI. §. 17.*), ejusque diagonalis sit recta AB, triangula BAE, BAC erunt æqualia (*Lib. VI. §. 21.*). Spectari autem possunt veluti bases pyramidum BADC, BADE. Ergo duæ pyramides BADC, BADE bases habent æquales. Sunt quoque ejusdem altitudinis; cum eadem recta ducta a communi apice D in commune planum EBCA utriusque pyramidis altitudinem definiat. Ergo duæ pyramides BADC, BADE sunt æquales (§. 27.). Eodem modo ostendam, etiam duas pyramides ABCD, EDAF esse æquales. Igitur tres pyramides BADC, BADE, EDAF sunt æquales inter se (*Syn. Alg. §. 259.*); ac proinde prisma ABD est triplum pyramidis ABDC. Ostensum est autem, pyramidem ABDC æqualem esse pyramidi *abcd*. Ergo prisma ABD pyramidis quoque *abcd* triplum erit (*Lib. I. §. 112.*)

Fig. 10. Fig. 11. Tab. 9.

30. Sit modo prisma AGH pentagonam habens basim FGHKM. Sub eadem autem altitudine habeatur pyramis *abd*, cujus basis *bcdef* similis sit, & æqualis basi FGHKM ipsius prismatis. Dico, prisma AGH triplum esse pyramidis *abd*.

Fig. 12. Fig. 13. Tab. 9.

Demonstratio

Quoniam pentagona FGHKM, *bcdef* similia sunt, & æqualia, ductis rectis FH, MG, *fc*, *ec*, divisa erunt in totidem triangula similia, & æqualia alterum alteri. Quamobrem diviso prismate AGH in tria prismata triangularia ACHFGB, ACHFMEC, ECHMKD, sectaque pyramide *abd* in tres pyramides itidem triangulares *afcb*, *afce*, *aced*, cum horum omnium solidorum eadem sit altitudo, & duo triangula FGH, *fcb* sint æqualia, prisma ACHFGB triplum erit pyramidis *afcb*, ut supra demonstravimus. Prisma quoque ACHFME triplum erit pyramidis *afce*, & prisma ECHMKD pyramidis *aced*. Igitur totum prisma AGH triplum erit totius pyramidis *abd* (*Lib. I.* §. 144.). Omne igitur prisma &c. quod erat &c.

COROLLARIUM I.

Omnis conus est tertia pars cylindri ejusdem basis, & altitudinis.

31. Conus nimirum CED est tertia pars cylindri ACDB habentis eandem basim CD, & altitudinem EF. Cum enim omnis conus pro pyramide infinitangula (*Lib.* XI. §. 72.), & omnis cylindrus pro prisinate infinitorum laterum spectari queat (§. 70.), sicuti omnis pyramis est tertia pars prismatis ejusdem basis, & altitudinis, ita omnis conus erit tertia pars cylindri eandem quoque basim, atque altitudinem habentis.

Fig. 14. Tab. 9.

COROLLARIUM II.

Magnitudo, cujus elementa decrescunt in ratione duplicata imminutæ altitudinis, est tertia pars illius, cujus elementa neutiquam minuuntur, dummodo eadem sit utriusque basis, & altitudo.

32. Ostensum namque est, omnem pyramidem esse tertiam partem prismatis habentis eandem basim, & altitudinem (§. 29. 30). Omnem quoque conum esse tertiam partem cylindri, dummodo eorum bases, & altitudines sint respective inter se æquales (§. 31.). Elementa autem pyramidis, & coni decrescunt in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis (*Lib.* XI. §. 94. 101.), non sic autem elementa prismatis, & cylindri, quæ semper manent eadem (§. 79 85.). Ergo &c.

Co-

Corollarium III.

Pyramides sunt directe inter se, ut prismata eandem cum illis habentia basim, & altitudinem.

33. Pyramis nempe DMFE eam habet rationem ad pyramidem *dmfe*, quam habet prisma ADEC eandem habens basim DEF, & altitudinem MN cum pyramide DMFE, ad prisma *adec* ejusdem cum pyramide *dmfe* basis *def*, & altitudinis *mn*. Pyramides enim DMFE, *dmfe* sunt partes similes prismatum ADEC, *adec* (*Lib. I. §.* 37.), utpote in ratione *subtripla* ad suum prisma respective (§. 29.). Ergo, ut prisma ADEC ad prisma *aedc*, ita erit pyramis DMFE ad pyramidem *dmfe* (§. 126.). Fig. 7. Fig. 4. Tab. 9.

Corollarium IV.

Coni sunt directe inter se, ut cylindri habentes eandem cum illis basim, & altitudinem.

34. Ut si conus CED, & cylindrus ACDB eandem habeant basim CD, & altitudinem EF, sicuti etiam conus *ced*, & cylindrus *acdb*, erit conus CED ad conum *ced*, ut est cylindrus ACDB, ad cylindrum *acdb*. Eadem enim est ratio, nempe *subtripla*, utriusque coni ad suum cylindrum (§. 31.). Fig. 14. Fig. 15. Tab. 9.

Theorema V.

Prismata aequalium basium, & altitudinum sunt inter se aequalia.

35. Duo prismata ADE, *ade* habeant aequales bases DEF, *def*, & altitudines CF, *cf*. Dico, ea esse inter se aequalia.

Demonstratio.

Cum enim aequales sint bases DEF, *def*, utriusque prismatis elementa erunt magnitudine inter se aequalia (*Lib. XI. §.* 77.), Sunt autem etiam numero aequalia; cum tot in utroque sint, quot in eorum altitudine habentur puncta (§. 79.). Ergo prismata *adf*, ADF sunt inter se aequalia (*Lib. IX. §.* 55.) Itaque prismata &c. quod erat ostendendum. Fig. 16. Fig. 17. Tab. 9.

Corollarium I.

Parallelepipeda aequalium basium, & altitudinum sunt aequalia.

36. Est enim parallelepipedum species prismatis (*Lib. XI. §.* 13.):

Corollarium II.

Cylindri æqualium basium, & altitudinum sunt æquales.

37. Cylindrus namque est prisma infinitorum laterum (§. 70.).

Corollarium III.

Planum diagonale dividit parallelepipedum in duo æqualia prismata.

Fig. 2. Tab. 7. 38. Nimirum æqualia sunt prismata ACFGHB, ACFGED, in quæ dividitur parallelepipedum BE a plano diagonali ACFG. Cum enim diagonalis GF dividat parallelogrammum GHFE in duo triangula æqualia GFH, GFE (*Lib. 6. §. 21.*), duo prismata ACFGHB, ACFGED æquales bases habebunt. Habent autem eandem altitudinem, utpote quæ ab altitudine ipsius parallelepipedi diversa non est. Ergo duo ipsa prismata erunt æqualia (§. 35.).

Corollarium IV.

Prisma triangulare est dimidium parallelepipedi super dupla basi, & sub eadem altitudine constituti.

39. Videlicet prisma triangulare ACFGHB est dimidium parallelepipedi BE super dupla basi GHFE, & sub eadem altitudine BH constituti. Patet ex præcedenti.

Theorema VI.

Prismata ejusdem altitudinis sunt directe inter se, ut eorum bases.

40. Sint duo prismata AEF, *aef*, quorum altitudines MN, *mn* æquales sint inter se, bases vero DEF, *def* inæquales. Dico, prisma AEF eam habere rationem ad prisma *aef*, quam habet basis DEF ad basim *def*.

Demonstratio.

Ponatur basis DEF $= xr$, basis *def* $= yu$, & utriusque altitudo $= z$. Erit ergo prisma AEF $= xrz$, & prisma *def* $= yuz$. Est autem $xrz . yuz = xr . yu$ (*Lib. I. §. 93.*). Ergo erit quoque prisma AEF ad prisma *aef*, ut est basis DEF ad basim *def*; adeoque prismata &c. quod erat ostendendum.

Co-

COROLLARIUM I.

Parallelepipeda ejusdem altitudinis sunt, ut bases.

41. Omne namque parallelepipedum est prisma (*Lib. XI.* §. 23.).

COROLLARIUM II.

Pyramides ejusdem altitudinis sunt, ut bases.

42. Ut si altitudo MN pyramidis DMFE æqualis fuerit altitudini *mn* pyramidis *dmfe*, erit pyramis DMFE ad pyramidem *dmfe*, ut est basis DEF ad basim *def*. Pyramides namque DMFE, *dmfe* sunt directe inter se, ut prismata AEF, *aef* super easdem bases, & sub iisdem altitudinibus constituta (§. 33.). Fig. 18. Fig. 19. Tab. 9.

COROLLARIUM III.

Cylindri ejusdem altitudinis sunt, ut bases.

43. Cylindrus nempe ABCD eam habet rationem ad cylindrum *abcd*, quam habet basis BC ad basim *bc*, si eorum altitudines EF, *ef* fuerint æquales. Spectari enim possunt, veluti prismata infinitorum laterum (*Lib. XI.* §. 70.). Fig. 10. Fig. 11. Tab. 9.

COROLLARIUM IV.

Coni æque alti sunt, ut eorum bases.

44. Ut si æquales fuerint altitudines EF, *ef* conorum BEC, *bec*, erunt ipsi coni directe inter se, ut ipsorum bases BC, *bc*. Coni namque BEC, *bec* sunt inter se, ut cylindri ABCD, *abcd* super easdem bases BC, *bc*, & sub iisdem altitudinibus EF, *ef* constituti (§. 34.). Fig. 20. Fig. 21. Tab. 9.

COROLLARIUM V.

Bases prismatum, pyramidum cylindrorum & conorum ejusdem altitudinis sunt respective inter se, ut ipsa corpora directe.

45. Sicuti namque prismata ejusdem altitudinis sunt directe inter se, ut ipsorum bases, ita vicissim bases prismatum eandem altitudinem habentium erunt directe, ut ipsa prismata. Idipsum dicito de pyramidibus, cylindris, & conis *respective*.

THEO-

THEOREMA VII.

Prismata æqualium basium sunt directe inter se, ut eorum altitudines.

Fig. 1. Fig. 2. Tab. 10. 46. Duo prismata ABC, *abc* habeant æquales bases BEC, *bec* sed inæquales altitudines MN, *mn*. Dico, prisma ABC esse ad prisma *abc*, ut est altitudo MN ad altitudinem *mn*.

Demonstratio.

Coincidit cum demonstratione theorematis præcedentis.

COROLLARIUM I.

Parallelepipeda æqualium basium sunt directe, ut altitudines.

47. Quandoquidem omne parallelepipedum est prisma (*Lib. XI. §. 23.*).

COROLLARIUM II.

Pyramides æqualium basium sunt directe, ut altitudines.

Fig. 1. Fig. 2. Tab. 10. 48. Si nimirum æquales fuerint bases BEC, *bec* pyramidum BMCE, *bmce*, pyramis BMEC erit ad pyramidem *bmec*, ut est altitudo MN ad altitudinem *mn*. Est enim pyramis BMEC ad pyramidem *bmec*, ut est prisma AEC ad prisma *aec*, quæ sunt super easdem bases, & sub iisdem altitudinibus constituta (§. 40.).

COROLLARIUM III.

Cylindri æqualium basium sunt directe inter se, ut ipsorum altitudines.

Fig. 3. Fig. 4. Tab. 10. 49. Ratio nimirum cylindri ABCD ad cylindrum æqualis basis *abcd* diversa non est a ratione altitudinis EF ad altitudinem *ef*. Cylindri namque sunt prismata infinitorum laterum (*Lib. XI. §. 70.*).

COROLLARIVM IV.

Coni æqualium basium sunt, ut altitudines.

Fig. 3. Fig. 4. Tab. 10. 50. Videlicet conus BEC est ad conum *bec* ejusdem basis, ut est altitudo EF ad altitudinem *ef*. Est enim conus BEC ad conum *bec*, ut est cylindrus ABCD ad cylindrum *abcd* (§. 34.).

Co.

Corollarium V.

Altitudines prismatum, pyramidum, cylindrorum, & conorum æquales bases habentium sunt directe inter se, ut ipsa corpora respective.

51. Sicuti namque hujusmodi corpora sunt directe, ut altitudines, ita vicissim altitudines erunt, ut ipsa corpora.

Corollarium VI.

Prismata, pyramides, coni, & cylindri inæqualium basium, & ejusdem altitudinis, vel inæqualis altitudinis, & ejusdem basis sunt magnitudine respective inter se inæquales.

52. Etenim in primo casu sunt directe inter se, ut bases, in secundo, ut altitudines.

Theorema VIII.

Prismata inæqualium basium, & altitudinum sunt directe inter se in ratione composita basium, & altitudinum.

53. Sint duo prismata AE, *ae*, quorum bases DEF, *def* inæquales sint inter se, sicuti etiam altitudines MN, *mn*. Dico, prisma AE esse ad prisma *ae* in ratione composita ex ratione basis DEF ad basim *def*, & ex ratione altitudinis MN ad altitudinem *mn*. Fig. 5. Fig. 4. Tab. 9.

Demonstratio I.

Esto basis DEF $= px$, basis *def* $= qz$, altitudo MN $= r$, & altitudo *mn* $= y$. Erit ergo prisma AE $= pxr$, & prisma *ae* $= qzy$. Est autem productum pxr ad productum qzy in ratione composita ex ratione primi termini px ad secundum qz, & ex ratione tertii r ad quartum y (*Lib. I. §. 168.*). Ergo prisma quoque AE erit ad prisma *ae* in ratione composita ex ratione basis DEF ad basim *def*, & ex ratione altitudinis MN ad altitudinem *mn*.

Demonstratio II.

Prisma AE secetur plano *XZR* basi *DEF* parallelo ad altitudinem *RF* æqualem altitudini *mn* prismatis *ae*. Ponatur autem basis *def* prismatis *ae* eam habere rationem ad basim *DEF* prismatis *AE*, quam habet quantitas x ad quantitatem y, & altitudo PN, sive *mn* ad altitudinem MN ponatur, ut quantitas y ad quantitatem z. Itaque cum prismata *ae*, *RD* habeant per

hypo-

hypothesim eandem altitudinem, erit prisma *ae* ad prisma *RD*; ut basis *def* ad basim *DEF*. (§. 40.), sive ut quantitas x ad quantitatem y. Est autem prisma *RD* ad prisma AE ejusdem basis, ut altitudo PN, sive *mn* ad altitudinem MN (§. 46.), nempe ut quantitas y ad quantitatem z. Ergo ex *æqualitate rationis* erit prisma *ae* ad prisma AE, ut quantitas x ad quantitatem z (*Lib. I.* §. 179.). Manifestum porro est, primam x trium x, y, z esse ad tertiam z in ratione composita ex ratione primæ x ad secundam y, & ex ratione secundæ y ad tertiam z (§. 176.). Ergo prisma quoque *ae* erit ad prisma AE in ratione composita ex ratione quantitatis x ad quantitatem y, sive basis *def* ad basim DEF, & ex ratione quantitatis y ad quantitatem z, seu altitudinis *mn* ad altitudinem MN. Itaque prismata &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Parallelepipeda inæqualium basium, & altitudinum sunt inter se in ratione composita basium, & altitudinum.

54. Omne enim parallelepipedum est prisma (*Lib. XI.* §. 23.).

COROLLARIUM II.

Cubi sunt in ratione composita basium, & altitudinum.

55. Etenim omnis cubus est parallelepipedum (*Lib. XI.* §. 28.).

COROLLARIUM III.

Pyramides inæqualium basium, & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum.

Fig. 3. Fig. 4. Tab. 9. 56. Videlicet pyramides DME, *dme* inæqualium basium DEF, *def*, & altitudinum MN, *mn* sunt inter se in ratione composita ipsarum basium, & altitudinum. Sunt enim, ut prismata AE, *ae* super easdem bases, & sub iisdem altitudinibus constituta (§. 33.).

COROLLARIVM IV.

Cylindri inæqualium basium, & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum.

Fig. 14. Fig. 15. Tab. 9. 57. Cylindrus nempe AD est ad cylindrum *ad* inæqualis basis, & altitudinis in ratione composita ex ratione basis CD ad basim *cd*, & ex ratione altitudinis EF ad altitudinem *ef*. Cylindri namque sunt prismata infinitorum laterum (*Lib. XI.* §. 70.).

Co-

COROLLARIUM V.

Coni inæqualium basium, & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum.

58. Ratio scilicet conorum CED, *ced* inæqualium basium CD, *cd*, & altitudinum EF, *ef* est composita ex ratione basium CD, *cd*, & altitudinum EF, *ef*. Coni namque CED, *ced* sunt directe inter se, ut cylindri AD, *ad* super easdem bases, & sub iisdem altitudinibus constituti (§. 34).

THEOREMA IX.

Illa prismata sunt inter se æqualia, quæ reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines.

59. Sint duo prismata AE, *ae*, quæ sic se habeant, ut quam proportionem habet basis CDE ad basim *cde*, eandem habeat altitudo *fh* ad altitudinem FH. Dico, prismata AE, *ae* esse inter se æqualia. Fig. 5. Fig. 6. Tab. 10

Demonstratio I.

Ponatur basis $CDE = mn$, basis $cde = pq$, altitudo $fh = x$, & altitudo $FH = y$. Erit ergo per hypothesim $mn.\ pq = x.\ y$, atque adeo $mny = pqx$ (*Lib.* I. §. 82.); Est autem prisma $AE = mny$, & prisma $ae = pqx$. Ergo erit quoque $AE = ae$ (*Syn. Alg.* §. 259.). Illa ergo prismata &c.

Demonstratio II.

Vel enim altitudines *FH*, *fh* æquales sunt inter se, vel inæquales. Si sunt æquales: ergo bases quoque *CDE*, *cde* æquales erunt (*Lib.* I. §. 45.); cum sit per hypotesim basis *CDE* ad basim *cde*, ut altitudo *fh* ad altitudinem *FH*, atque adeo ipsa itidem prismata *AE*, *ae* erunt æqualia (§. 35.). Si vero altitudines *FH fh*, sunt inæquales, nempe altitudo *FH* major altitudine *fh*, ad altitudinem *ZH* altitudini *fh* æqualem seceiur prisma *AE* plano *MNP* parallelo basi *CDE*. Erit ergo prisma *ae* ad prisma *ME* ejusdem altitudinis *ZH*, ut est basis *cde* ad basim *CDE* (§. 40.). Est autem basis *cde* ad basim *CDE*, ut altitudo *FH* ad altitudinem *fh*, sive ad altitudinem *ZH* per hypothesim. Ergo erit prisma *ae* ad prisma *ME*, ut altitudo *FH* ad altitudinem *ZH*. Constat autem, prisma quoque *AE* esse ad prisma *NE* ejusdem basis *CDE*, ut est altitudo *FH* ad altitudinem *ZH* (§. 46.). Ergo utrumque prisma *AE*, *ae* eandem ad prisma *ME* rationem habet, duoque idcirco prismata *AE*, sunt inter se æqualia (*Lib.* I. § 103.). Illa ergo prismata &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Illa parallelepipeda sunt æqualia inter se, quæ reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines.

60. Cum enim omne parallelepipedum sit prisma (*Lib. XI.* §. 23.), quod de prismatibus ostensum est, parallelepipedis etiam convenit.

COROLLARIUM II.

Illæ pyramides sunt æquales, quæ reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines.

61. Æquales nimirum erunt pyramides CFE, *cfe*, si basis CDE fuerit ad basim *cde*, ut est altitudo *fh* ad altitudinem FH. Sunt enim ipsæ pyramides, ut prismata AE, *ae* super easdem bases, & sub iisdem altitudinibus constituta (§. 33.).

Fig. 5. Fig. 6. Tab. 10.

COROLLARIUM III.

Cylindri, qui reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines, sunt æquales.

62. Ut si ratio basis CD cylindri AD ad basim *cd* cylindri *ad* eadem fuerit, ac ratio altitudinis *ef* ad altitudinem EF, duo ipsi cylindri erunt æquales. Sunt enim prismata infinitorum laterum (*Lib. XI.* §. 70.).

Fig. 7. Fig. 8. Tab. 10.

COROLLARIUM IV.

Illi coni sunt æquales, qui reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines.

63. Coni nimirum ECD, *ecd* æquales erunt inter se si bases CD, *cd* fuerint in ratione reciproca altitudinum EF, *ef*. Sunt enim coni ECD, *ecd*, ut cylindri AD, *ad* (§. 34.).

Fig. 7. Fig. 8. Tab. 10.

THEOREMA X.

Prismata æqualia reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines.

64. Duo prismata AE, *ae* sint inter se æqualia. Dico, basim CDE esse ad basim *cde*, ut est altitudo *fh* ad altitudinem FH.

Fig. 5. Fig. 6. Tab. 10.

De-

Demonstratio I.

Ponatur basis CDE $=$ *mn*, basis *cde* $=$ *pq*, altitudo *fh* $=$ *x*, & altitudo FH $=$ *y*. Erit ergo prisma AE $=$ *nny*, & prisma *ae* $=$ *pqx*. Quamobrem cum sit per hypothesim AE $=$ *ae*; erit quoque *mny* $=$ *pqx* (*Syn. Algeb.* §. 259.). Est autem *mny* productum extremarum *mn*, *y*, & factum *pqx* est productum mediarum *pq*, *x*. Ergo erit *mn*. *pq* $=$ *x*. *y* (*Lib.* I. §. 84.), atque adeo basis CDE ad basim *cde*, ut est *reciproce* altitudo *fh* ad altitudinem FH.

Demonstratio II.

Quandoquidem altitudines FH, *fh* vel æquales sunt inter se; vel inæquales. Si sunt æquales, cum per hypothesim prismata sint æqualia, æquales erunt etiam bases CDE, *cde* (§. 40.); ac proinde bases ipsæ erunt in ratione *reciproca* altitudinum. Si vero altitudines sunt inæquales, prisma AE majoris altitudinis secetur plano MNP basi CDE parallelo ad altitudinem ZH altitudini *fh* æqualem. Itaque cum prismata ME, *ae* sint ejusdem altitudinis, basis *cde* erit ad basim CDE, ut est solidum *ae* ad solidum ME (§. 45.), sive ut solidum AE ad solidum ME (*Lib. I.* §. 112.), ob æqualitatem scilicet solidorum AE, *ae*. Est autem prisma AE ad prisma ME ejusdem basis, ut altitudo FH ad altitudinem ZH (§. 46.). Ergo basis quoque *cde* erit ad basim CDE, ut altitudo FH ad altitudinem ZH (*Lib I.* § 78.). sive ut altitudo FH ad altitudinem *fh* (§. 112.). Itaque prismata æqualia &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Parallelepida æqualia reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines.

65. Omne siquidem parallepipedum est prisma (*Lib.* XI. §. 23.).

Corollarium II.

Pyramides æquales reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines.

66. Si nimirum pyramides FCE, *fce* æquales fuerint, bases CDE, *cde* erunt in ratione reciproca altitudinum FH, *fh*. Ipsæ namque pyramides sunt, ut prismata AE *ae* (§. 33.). Fig. 6. Fig. 5. Tab. 10.

Corollarium III.

Cylindri æquales reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines.

Fig. 7. Fig. 8. Tab. 10. 67. Videlicet si duo cylindri AD, *ad* æquales fuerint, basis CD erit ad basim *cd*, ut est reciproce altitudo *ef* ad altitudinem EF. Spectari enim possunt ipsi cylindri, veluti prismata infinitorum laterum (*Lib.* XI. §. 70.).

Corollarium IV.

Coni æquales reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines.

Fig. 7. Fig. 8. Tab. 10. 68. Bases nimirum CD, *cd* conorum æqualium ECD, *ecd* erunt in ratione reciproca altitudinum EF, *ef*. Sunt enim coni ipsi, ut cylindri AD, *ad* (§. 34.).

Theorema XI.

Parallelepipedum rectangulum factum ex tribus rectis lineis continuo proportionalibus est æquale cubo mediæ.

69. Sint tres rectæ lineæ continuo proportionales A, B, C, ex quibus fiat parallelepipedum rectangulum DH, ita nimirum ut ejus basis DEFG sit rectangulum contentum sub extremis A, C, altitudo vero HE sit media B. Ex eadem autem media B fiat cubus KP. Dico, parallelepipedum DH esse æquale cubo KP.

Demonstratio.

Fig. 9. Fig. 10. Tab. 10. Cum enim tres rectæ A, B, C sint continuo proportionales rectangulum DEFG contentum sub extremis A, C erit æquale quadrato KLMN mediæ B (*Lib.* IX. §. 111.). Hæc autem quadrilatera sunt bases solidorum DH, KP. Ergo duo parallelepipeda DH, KP habent bases æquales. Habent autem altitudines quoque HF. PM æquales inter se, utpote æquales mediæ B. Ergo duo parallelepipeda DH, KP erunt æqualia (§. 35.). Itaque parallelepipedum &c. quod erat ostendendum.

Scholion.

70. Porro observare plurimum interest cum viro Cl. P. Andrea Tacqueto, *ex tribus rectis lineis continuo proportionalibus quomodocunque inter se multiplicatis solidum ejusdem semper magnitudinis consurgere*. Sint enim tres rectæ lineæ continuo proportionales *a*, *b*, *c*. Solida, quæ ex illarum multiplicatione inter se mutuo fieri possunt, sint *abc*, *cab*, *bca*, in quibus duæ

primæ literæ exprimant basim, tertia altitudinem. Quoniam igitur est $ab.ca = b.c$ (*Lib. I. §. 93.*), basis *ab* solidi *abc* erit ad basim *ca* solidi *cab reciproce*, ut altitudo *b* posterioris ad altitudinem *c* prioris. Ergo duo solida *abc*, *cab* sunt æqualia (§. 59.). Eadem ratione erit $cab = bca$, cum sit $ca.bc = a.b$. Ergo erit $abc = cab = bca$ (*Syn. Alg. §. 259.*).

THEOREMA XII.

Omnia latera homologa planorum, quibus similia solida continentur, eandem inter se rationem habent.

71. Sint duo solida similia ACE, *ace* planis terminata AMF, *amf* * FME, *fme* &c. Dico, omnia latera homologa planorum similium, quibus continentur, eandem inter se rationem habere, nimirum esse AF. *af*. = ME. *me* &c. Fig. 7. Fig. 8. Tab. 9.

Demonstratio.

Quoniam plana AMF, *amf* sunt similia, & latera ipsorum homologa AF, *af* * FM, *fm* * AM, *am*, erit AF. *af* = MF. *mf* (*Lib. IX. §. 77.*). Eadem ratione, cum similia sint plana MFE, *mfe*, & latera MF, *mf* * ME, *me* sint homologa, habebitur ME. *me* = MF. *mf*. Ergo erit ME. *me* = AF. *af* (*Lib. I. §. 76.*). Eodem modo demonstrabitur FE. *fe* = AF. *af*, atque ita de ceteris, omnia scilicet hujusmodi latera homologa esse *directe* inter se, ut duo qualibet AF, *af*; ac proinde eandem omnium esse rationem. Itaque omnia &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XIII.

Altitudines prismatum, & pyramidum similium, quorum bases sint duo ipsorum plana similia, sunt directe inter se, ut duo qualibet latera homologa planorum, quibus terminantur.

I.

72. Sint duo prismata similia AEF, *aef*, quorum bases DEF, *def*, sint duo plana ipsorum similia. Dico, eorum altitudines esse directe inter se, ut duo qualibet homologa latera EF, *ef*, planorum, quibus terminantur. Fig. 3. Fig. 4. Tab. 9.

Demonstratio.

Etenim, si duo illa prismata ad perpendiculum suis basibus DEF, *def* incumbunt, cum eorum altitudines tunc diversæ non sint a lateribus homologis CF, *cf* planorum similium BEFC, *befc* (*Lib. XI. §. 21.*), sitque horum omnium laterum eadem ratio (*Lib. IX. §. 77.*), remanet aperte, esse

CF. *cf* = EF. *ef*. Si vero ſint ad baſim inclinata, qua ratione ad baſes DEF, *def* ſe habent ſolida DME, *dme*, ut proinde eorum altitudines ſint rectæ MN, *mn*; ſuper eaſdem baſes DEF, *def*, & ſub altitudinibus CF, *cf*, quæ ſint ipſis MN, *mn* æquales, conſtituantur duo ſimilia priſmata AF, *af* ſuis baſibus ad perpendiculum inſiſtentia. Cum igitur ſit ex hypotheſi MN = CF, *mn* = *c,f*, erit MN. *mn* = CF. *cf*. Eſt autem CF. *cf* = EF. *ef*, ut modo demonſtravimus. Ergo erit quoque MN. *mn* = EF. *ef* (*Lib. I.* §. 77.), nimirum altitudines, ut duo homologa latera baſium ſimilium. Igitur altitudines ipſæ erunt itidem, ut duo quælibet planorum ſimilium, quibus priſmata ipſa continentur, homologa latera.

II.

Fig. 3. Fig. 4. Tab 9. 73. Sint duæ pyramides ſimiles DMFE, *dmfe*, quarum baſes ſint plana ſimilia DEF, *def*, altitudines vero MN, *mn*. Dico, altitudines MN, *mn* eſſe *directæ* inter ſe, ut duo quælibet homologa latera EF, *ef* ſimilium planorum DEF, *def*, quibus ipſæ pyramides terminantur.

Demonſtratio.

Si namque ſuper eaſdem baſes, & ſub iiſdem altitudinibus conſtituantur duo priſmata ſimilia AF, *af*, evidens eſt, altitudines MN, *mn* eſſe *directe* inter ſe, ut duo latera EF, *ef* (§. 72.). Ergo altitudines MN, *mn* pyramidum ſimilium ME, *me* ſunt inter ſe, ut duo homologa latera EF, *ef* ſuarum baſium; atque adeo ut duo quælibet latera aliorum planorum ſimilium, quibus pyramides ipſæ continentur; cum ſcilicet horum omnium laterum eadem ſit ratio (§. 71.). Itaque altitudines &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Baſes priſmatum, & pyramidum ſimilium, ſi ſint plana ſimilia, ſunt in ratione duplicata ſuarum altitudinum; & viciſſim altitudines in ratione ſubduplicata baſium.

74. Baſis nimirum DEF pyramidis ME erit ad baſim ſibi ſimilem *def* ſimilis pyramidis *me* in ratione *duplicata* altitudinis MN ad altitudinem *mn*; & viciſſim altitudines MN, *mn* in ratione *ſubduplicata* baſium. Conſtat enim, baſim DEF eſſe ad baſim *def* in ratione *duplicata* lateris EF ad latus ſibi homologum *ef* (*Lib. IX.* §. 180.), & viciſſim latus EF ad latus *ef* in ratione *ſubduplicata* baſis DEF ad baſim *def* (§. 182.). Eſt autem MN. *mn* = EF. *ef*. Ergo &c. Idipſum dicito de priſmatibus ſimilibus.

Co-

COROLLARIUM II.

Bases prismatum, atque pyramidum similium, si sint plana eorum similia, sunt, ut quadrata altitudinum; & vicissim quadrata altitudinum, ut eorundem bases.

75. Quadrata namque altitudinum sunt in ratione ipsarum *duplicata* (§. 172.).

COROLLARIUM III.

Bases parallelepipedorum similium sunt in ratione duplicata suarum altitudinum, atque adeo ut earundem quadrata.

76. Etenim omne parallelepipedum est prisma (*Lib. XI.* §. 23.).

THEOREMA XIV.

Altitudines cylindrorum, & conorum similium sunt directe inter se, ut suarum basium radii.

I.

77. Sint duo cylindri similes AD, *ad* suis basibus CD, *ad* ad perpendiculum insistentes, vel illis similiter inclinati, ut FD, *fd*. Dico ipsorum altitudines NE, *ne*, vel OR, *or* esse *directe* inter se, ut radii CE, *ce* suarum basium. Fig. 5. Fig. 6. Tab. 9.

Demonstratio.

Cum enim in cylindris perpendicularibus AD, *ad* altitudines NE, *ne* ab eorum axibus non differant (*Lib. XI.* §. 39.), altitudines erunt inter se, ut axes. Axes autem sunt, ut basium radii (§. 8.). Ergo in hac eadem itidem ratione erunt altitudines. In cylindris vero inclinatis FD, *fd*, cum ob similitudinem ipsorum cylindrorum anguli inclinationis OER, *oer* sint æquales (§. 6.), & anguli ORE, *ore* sint recti (*Lib. V.* §. 24.), adeoque æquales (*Lib. III.* §. 37.), reliquus angulus EOR in triangulo EOR æquabit reliquum angulum *eor* in triangulo *eor* (*Lib. V.* §. 46.); ac proinde duo triangula EOR, *eor*, utpote æquiangula, erunt sibi mutuo similia (*Lib.* IX. §. 66.). Igitur homologa latera, sive altitudines OR, *or*, erunt inter se, ut latera homologa OE, *oe* nempe ut axes (§. 77.). Axes autem OE, *oe* sunt, ut basium radii CE, *ce* (§. 8.). Ergo in eadem quoque ratione radiorum erunt altitudines OR, *or* (*Lib. I.* §. 77.).

II.

Fig. 5. Fig. 6. Tab. 9. 78. Sint duo coni similes CND, *cnd* recti, vel COD, *cod* suis basibus CD, *cd* inclinati. Dico, altitudines NE, *ne*, vel OR, *or* esse *directe* inter se, ut radii CE, *ce* suarum basium.

Demonstratio.

Eadem est in utroque casu cum praecedenti. Itaque altitudines &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Altitudines cylindrorum, & conorum similium sunt directe inter se, ut diametri suarum basium.

79. Circulorum namque diametri sunt *directe* inter se, ut eorundem radii (*Lib. I. §.* 127.).

COROLLARIUM II.

Bases cylindrorum, & conorum similium sunt in ratione duplicata altitudinum, & vicissim altitudines in ratione subduplicata basium.

80. Quandoquidem circuli sunt in ratione *duplicata* suarum diametrorum (*Lib. IX. §.* 186.), & vicissim diametri in ratione ipsorum *subduplicata* (*§.* 192.). Ratio autem altitudinum in cylindris, & conis similibus diversa non est, a ratione diametrorum suarum basium. Ergo &c.

COROLLARIUM III.

Bases cylindrorum, & conorum similium sunt inter se, ut quadrata altitudinum; & vicissim quadrata altitudinum, ut bases.

81. Constat enim, quadrata altitudinum esse inter se in ratione ipsarum *duplicata* (*Lib. IX. §.* 172.).

THEO-

THEOREMA XV.

Superficies cylindrorum, & conorum similium sunt directe inter se in ratione duplicata diametrorum suarum basium.

I.

82. Sint duo cylindri similes AD, *ad*. Dico, totam cylindri AD superficiem esse ad totam superficiem cylindri *ad* in ratione *duplicata* diametrorum CD, *cd* suarum basium. Fig. 11. Fig. 12. Tab. 9.

Demonstratio.

Esto EMNF unum ex illis parallelogrammis infinitæ parvæ latitudinis, quibus cylindrica superficies ACDB terminatur (*Lib.* XI. §. 71.), & *emnf* sit unum ex illis itidem parallelogrammis, quibus cylindrica superficies *acdb* comprehenditur. Quoniam igitur duo cylindri sunt per hypothesim sibi mutuo similes, omnisque cylindrus sit prisma infinitorum laterum (§. 70.), duo cylindri AD, *ad* spectari possunt veluti duo prismata similia, totidem idcirco similibus planis comprehensa (§. 1.). Duo ergo ex his parallelogrammis similibus sint EFMN, *efmn*. Cum igitur hæc sint in ratione *duplicata* suorum laterum homologorum MN, *mn* (*Lib.* IX. §. 170.), & duo latera MN, *mn* sint inter se, ut diametri CD, *cd* (§. 156.); cum sint arcus similes, licet infinite parvi, peripheriarum CMD, *cmd*, duo plana EFMN, *efmn* erunt in ratione *duplicata* diametrorum CD, *cd*. Hæc porro plana EFMN, *efmn* sunt partes aliquotæ similes cylindricarum superficierum ACDB, *acdb* per hypothesim. Ergo cylindrica quoque superficies ACDB erit ad cylindricam superficiem *acdb* in ratione *duplicata* diametri CD ad diametrum *cd* (*Lib.* I. §. 127.).

II.

83. Sint duo similes coni BAE, *bae*. Dico, conicas hujusmodi superficies esse directe inter se in ratione *duplicata* diametrorum BE, *be* suarum basium. Fig. 13. Fig. 14. Tab. 12.

Demonstratio.

Eadem est cum præcedenti. Ut enim similium cylindrorum superficies ex similibus parallelogrammis, ita similium conorum superficies ex totidem similibus triangulis consurgunt (*Lib.* XI. §. 73.). Erit ergo conica superficies BAE ad conicam superficiem *bae*, ut triangulum infinite parvum CAD ad triangulum sibi simile *cad* (*Lib.* I. §. 127). Sunt autem hujusmodi triangula in ratione duplicata laterum homologorum, sive arcuum simi-

ſimilium CD, *cd* (§. 166.); proinde diametrorum BE, *be* (§. 156.). Ergo in eadem quoque ratione erunt conicæ ipſæ ſuperficies BAE, *bae* (§. 77.). Superficies itaque cylindrorum &c. quod erat oſtendendum.

S C H O L I O N.

84. Si cylindricæ ſuperficies ſumantur una cum circulis, quibus ipſi cylindri terminantur, & ſuperficies conicæ una cum baſium circulis itidem ſpectentur, ipſa adhuc tota aſſertio manifeſta eſt. Sunt enim circuli in ratione ſuarum diametrorum *duplicata* (*Lib. IX.* §. 186.).

C O R O L L A R I U M I.

Superficies cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt reſpective inter ſe, ut quadrata diametrorum ſuarum baſium.

85. Hujuſmodi enim quadrata ſunt, quemadmodum ipſæ cylindricæ, & conicæ ſuperficies, in ratione ipſarum diametrorum *duplicata* (*Lib. IX.* §. 172.).

C O R O L L A R I U M II.

Superficies cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt in ratione duplicata tum axium, tum altitudinum.

86. Axes namque, & altitudines cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt directe inter ſe, ut diametri baſium (§. 8.).

C O R O L L A R I U M III.

Similium cylindrorum, & conorum ſuperficies ſunt, ut quadrata axium, & altitudinum.

87. Sunt enim ejuſmodi quadrata in ratione ipſorum axium, & altitudinum *duplicata* (*Lib.* IX. §. 172.).

C O R O L L A R I U M IV.

Superficies cylindrorum, & conorum ſimilium ſunt directe, ut circuli baſium, & viciſſim circuli baſium, ut ſuperficies.

88. Conſtat enim, circulos baſium eſſe inter ſe in ratione ſuarum diametrorum *duplicata* (*Lib. IX.* §. 186.) quemadmodum horum ſolidorum ſuperficies.

Co-

COROLLARIUM V.

Si conus rectus secetur plano basi parallelo, curva superficies totius coni erit ad curvam superficiem segmenti conici, ut circulus baseos coni ad circulum sectionis.

89. Ut si conus rectus BAD secetur plano MN basi BCD parallelo, curva superficies totius coni erit ad curvam superficiem segmenti conici MAN, ut est circulus baseos BCD totius coni ad circulum sectionis MN. Et enim coni BAD, MAN sunt sibi mutuo similes (§. 26.). Tab. 7. Fig 7.

COROLLARIUM VI.

Si ratio diametrorum basium, vel ratio axium, aut altitudinum in cylindris, & conis similibus continuetur usque ad tertium terminum, superficies horum corporum respective erunt inter se, ut illorum primus ad tertium.

90. Ut si diameter CD basis CD cylindri AD fuerit ad diametrum *cd* basis *cd* cylindri similis *ad*, ut est quantitas x ad quantitatem y, & fiat ∺ x. y. z, superficies cylindri AD erit ad superficiem cylindri *ad*, ut est prima x ad tertiam z. Est enim x ad z in ratione *duplicata* primæ x ad secundam y (*Lib. I.* §. 277.). Idipsum dicito de ratione axium, & altitudinum. Fig. 5. Fig. 6 Tab. 9

THEOREMA XVI.

Polyedra similia in totidem ex æquo pyramides similes resolvi possunt.

91. Sint duo polyedra similia ACE, *ace*. Dico, ea in totidem ex æquo pyramides similes resolvi posse.

Demonstratio.

Sumto in area polyedri ACE puncto M, ex eo veluti centro ducantur ad singulos ipsius polyedri angulos rectæ MB, MP, MA, MH &c. His divisum erit polyedrum ACE in tot pyramides, punctum M pro vertice communi, & polyedri plana pro base habentes, ut patet de pyramidibus BMAP, AMFH, quot sunt plana, quibus ipsum polyedrum terminatur. Concipiatur modo polyedrum ACE veluti consurgens ex pluribus polyedricis superficiebus, quæ omnes sit concentricæ cum extima superficie ACE, earumque plana sint respective parallela planis ipsius superficiei extimæ ACE, prout exhibet superficies *bdf* polyedro ACE inclusa. Cum igitur plana *bpa*, BPA sint in pyramide BMAP inter se parallela, erunt sibi mutuo similia (*Lib. XI.* §. 88.) Fig. 15. Fig. 16. Tab. 10.

XI. §. 88.), eandemque ob causam similia erunt etiam plana *abf*, AHF, nec non plana *fne*, FNE, atque ita de ceteris. Quamobrem polyedrum superficie *bdf* terminatum simile erit polyedro ACE (§. 1.). Eodem modo ostendam, ea omnia polyedra, quæ superficiebus soliditatem polyedri ACE constituentibus continentur, polyedro ACE esse similia. Quoniam autem hujusmodi polyedra polyedro ACE inclusa, eique similia, eo continuo minora sunt, quo ipsorum superficies centro M fit proximior, uni certe ex ipsis æquale erit polyedrum *ace*, utpote quod minus est polyedro ACE, & illi simile. Ponamus ergo, polyedrum *ace* æquale esse polyedro *bdf*. Constat autem, polyedrum *bdf* constare ex tot pyramidibus, ex quo componitur polyedrum ACE atque unius pyramides similes esse pyramidibus alterius, alteram alteri, videlicet pyramidem *dMez* pyramidi DMEZ, pyramidem *eMfn* pyramidi EMFN, atque ita deinceps (§. 25.); cum plana *dze*, DZE sint parallela, sicuti etiam plana *enf*, ENF &c. Ergo polyedrum quoque *ace* resolvi potest in tot pyramides, in quot polyedrum ACE dividitur, & ea quidem ratione, ut pyramides polyedrum constituentes *ace* similes sint iis, quæ polyedrum ACE constituunt, altera alteri, quæ nimirum super similia ipsorum polyedrorum plana sunt constitutæ. Itaque polyedra similia &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

92. Erectis super similia plana DZE, *dae* similibus pyramidibus DMEZ, *dmea*, ductisque ex illarum apicibus M, *m* ad singulos ipsorum polyedrorum angulos rectis ME, *me* * MZ, *ma* &c. polyedra ipsa similia in totidem ex æquo pyramides similes divisa erunt.

Corollarium II.

Polyedra regularia ejusdem generis in totidem ex æquo pyramides similes resolvi possunt.

93. Omnia enim polyedra regularia ejusdem generis sunt sibi mutuo similia (§. 3.).

Lemma I.

Polyedrum quodcunque regulare resolvi potest in tot pyramides omnino inter se æquales, quot sunt illius plana.

94. Esto polyedrum regulare ACE. Dico, ipsum resolvi posse in tot pyramides omnino inter se æquales, quot sunt plana, quibus terminatur.

De-

Demonstratio.

Ex illius centro M ad singulos ejusdem angulos ducantur radii MB, MP, MA, MH, MF &c. Quoniam igitur polyedrum est regulare, omnia plana BPA, AHF, &c. quibus clauditur, erunt regularia, ejusdem generis, & inter se æqualia (*Lib. XI.* §. 10.): ac proinde æqualia inter se erunt omnia illorum latera BA, BP, PA, AF, AH, HF &c. (*Lib. V.* §. 20.). Sunt autem æquales inter se etiam radii MB, MP, MA, MH &c. (§. 15.). Ergo omnia triangula BMA, BMP, PMA, AMF, AMH &c., quibus pyramides BMAP, AMFH continentur, sunt isosceliа (*Lib. V.* §. 25.), & inter se æqualia (§. 84.). Quamobrem pyramides ipsæ sunt hujusmodi, ut, una intra alteram posita, sibi mutuo perfecte congruant; atque adeo omnes sunt inter se æquales (§. 34.). Hæ autem tot sunt, quot sunt plana polyedrum ipsum terminantia, ut patet. Ergo polyedrum ACE in tot resolvi potest pyramides &c. quod erat ostendendum. Fig. 15. Tab. 10.

Corollarium I.

Anguli verticales æqualium pyramidum, in quas regulare polyedrum resolvitur, sunt omnes inter se æquales.

95. Cum enim anguli verticales BMP, BMA, PMA, AMF &c. isoscelium triangulorum, quibus verticales ipsarum pyramidum anguli continentur, sint æquales (§. 82.), ob æqualitatem scilicet tum laterum, tum basium ipsorum triangulorum, ipsique verticales pyramidum anguli totidem ex æquo planis angulis contineantur, perspicuum est, eos omnes esse inter se æquales (*Lib. XI.* §. 4.). Fig. 15. Tab. 10.

Corollarium II.

Angulus verticalis singularum pyramidum æqualium, in quas polyedrum regulare resolvitur, est ad quatuor solidos rectos angulos, ut basis ipsius pyramidis ad totam polyedri superficiem.

96. Angulus nempe verticalis BMA pyramidis BMAP in polyedro regulari ACE est ad quatuor solidos rectos angulos, qui circa centrum M fieri possunt, ut est basis BPA ipsius pyramidis ad totam polyedri superficiem. Etenim, cum in tot pyramides æquales polyedrum ACE resolvatur, quot sunt plana ipsum terminantia, omnesque verticales ipsarum pyramidum anguli, qui spatium replent circa centrum M, quique propterea quatuor rectos angulos simul sumti adequant, sint inter se æquales (§. 95.), sicuti æqualia sunt inter se mutuo omnia plana, quæ polyedricam superficiem ACE constituunt (*Lib. XI.* §. 10.), quæ pars aliquota Fig. 15. Tab. 10.

totius

totius polyedricæ superficiei ACE est planum BPA, eadem pars aliquota quatuor rectorum erit angulus verticalis EMA pyramidis BMAP; ac proinde &c.

THEOREMA XVII.

Si ex centro polyedrorum regularium ejusdem generis ad singulos ipsorum angulos radii ducantur, in totidem ex æquo pyramides sibi mutuo similes polyedra ipsa divisa erunt.

Fig.25. Fig.26. Tab.10. 97. Sint duo polyedra ejusdem generis ACE, *ace*. Ex eorum centro M, *m* ducantur ad singulos ipsorum angulos radii MB, *mb*, MP, *mp* &c. Dico omnes pyramides, in quas divisum est polyedrum ACE, iis esse similes in quas divisum est polyedrum *ace*, & simul numero esse æquales.

Demonstratio.

Cum enim in utroque polyedro tot distinctæ sint pyramides, quot sunt plana terminantia, pyramides ipsæ in utroque erunt numero æquales. Quippe polyedra ipsa sunt per hypothesim ejusdem generis. Rursus cum omnes pyramides, in quas divisum est polyedrum ACE, sint æquales inter se (§. 94.), sicuti etiam omnes pyramides, in quas divisum est polyedrum *ace*, erit angulus verticalis DME pyramidis DMEZ ad quatuor rectos, ut planum DZE ad totam polyedri ACE superficiem (§ 96.). Angulus quoque verticalis *dme* pyramidis *dmea* erit ad quatuor rectos, ut planum *dae* ad totam superficiem poyedri *ace*. Eadem est autem ratio utriusque plani DZE, *dae* ad totam sui *respective* polyedri superficiem; cum polyedra ipsa regularia sint, & ejusdem generis. Ergo anguli quoque verticales DME, *dme* pyramidum DMEZ, *dmea* eandem ad quatuor rectos rationem habebunt; atque adeo erunt inter se æquales (*Lib.* I. §.103.). Anguli autem solidi æquales planis angulis numero, & magnitudine æqualibus continentur (*Lib.* XI. §. 4.). Ergo anguli plani DME, *dme* æquales erunt inter se, sicuti etiam anguli plani DMZ, *dma*, nec non ZME, *ame*. Est autem latus DM ad latus ME in triangulo plano DME, ut in triangulo plano *dme* est latus *dm* ad latus *me*, cum sit DM = ME, & *dm* = *me* (§. 15.). Ergo duo triangula DME, *dme* sunt sibi mutuo similia (*Lib.* IX. §. 69.). Eodem modo ostendam, similia esse sibi mutuo tum duo triangula DMZ, *dma*, tum duo ZME, *ame*, eo vel maxime quod, ut superiori loco demonstravimus (§. 95.), omnia triangula quibus continetur pyramis DMEZ, isocelia sint, & æqualia, sicuti etiam omnia triangula, quibus pyramis *dmea* comprehenditur. Manifestum porro est, duo quoque plana DZE, *dae* esse sibi mutuo similia (*Lib.* IX. §. 3.); cum sint regularia, & ejusdem generis. Ergo duæ pyramides DMEZ, *dmea* planis numero æqualibus, & magnitudine similibus terminantur; ac proinde sunt sibi mutuo similes (§. 1.). Demonstravimus autem, omnes pyramides, in

quas

quas dividitur polyedrum regulare ope rectarum; quæ ex illius centro ad singulos ejusdem angulos ducuntur, esse omnino inter se æquales (§. 94.). Ergo omnes pyramides, in quas divisum est polyedrum regulare ACE ope radiorum MB, MP, MA &c. similes sunt iis omnibus, in quas polyedrum regulare ejusdem generis *ace* eodem modo resolvitur. Itaque si ex centro &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Radii polyedrorum regularium ejusdem generis sunt latera homologa pyramidum similium, in quas polyedra ipsa ope ipsorum radiorum resolvuntur.

98. Sic radii MD, *md* polyedrorum regularium ejusdem generis ACE, Fig. 15. *ace*, sunt latera homologa similium pyramidum DMEZ, *dmez*, in quas Fig. 16. polyedra ipsa suorum radiorum ope resolvuntur. Ipsi namque radii sunt Tab. 10 latera homologa planorum similium DME, *dme*, quibus ipsæ pyramides continentur.

THEOREMA XVIII.

Radii, & ceteri polyedrorum regularium ejusdem generis sunt directe inter se, ut duo qualibet latera homologa planorum similium, quibus polyedra ipsa terminantur.

Sint duo polyedra regularia ejusdem generis ACE, *ace*, quorum radii Fig. 7. sint rectæ ZA, *za*, ceteri vero rectæ ZN, *zn*. Fig. 8. Tab. 9.

I.

99. Dico primo, radium ZA esse ad radium *za*, ut est latus AM plani AMF ad latus sibi homologum *am* similis plani *amf*.

Demonstratio.

Radii ZA, *za* sunt latera homologa planorum similium AZM, *azm*, quibus similes pyramides AZMF, *azmf* continentur (§ 98.). Latera autem homologa planorum similium, quibus similia solida, cujusmodi sunt duo polyedra ACE, *ace* (§. 3.), terminantur, eandem omnia inter se rationem habent (§. 71.). Ergo radii ZA, *za* sunt *directe* inter se, ut duo homologa ipsorum polyedrorum latera AM, *am*.

II.

II.

100. Dico 2, catetum ZN esse ad catetum *zn*, ut latus AM ad latus sibi homologum *am*.

Demonstratio.

Cateti ZN, *zn* sunt altitudines pyramidum similium AZMF, *azmf* (§. 20.). Altitudines autem pyramidum sunt directe inter se, ut duo quælibet homologa ipsarum latera (§. 73.). Ergo catetus ZN erit ad catetum *zn*, ut latus AM ad latus sibi homologum *am*. Itaque radii, & cateti &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Cateti polyedrorum regularium ejusdem generis sunt directe inter se, ut ipsorum radii.

101. Sunt enim tam cateti, quam radii horum polyedrorum, ut duo quælibet homologa eorundem latera.

THEOREMA XIX.

Superficies omnium solidorum similium, quæ planis rectilineis continentur, sunt inter se in ratione duplicata homologorum laterum duorum quorumcunque planorum similium ipsa solida terminantium.

Fig. 7. Fig. 8. Tab. 9. 102. Sint duo solida similia ACE, *ace* rectilineis planis terminata. Dico, superficiem solidi ACE esse ad superficiem solidi *ace* in ratione *duplicata* lateris AF plani rectinei AMF ad latus sibi homologum *af* similis plani *amf*.

Demonstratio.

Quoniam eadem est ratio omnium laterum homologorum planorum similium, quibus solida ipsa ACE, *ace* continentur (§. 71.), & omnia plana similia in ratione *duplicata* suorum laterum homologorum (*Lib. IX.* §. 180.), duo quælibet plana similia, quibus terminantur solida ACE, *ace*; erunt in ratione *duplicata* lateris AF ad latus *af*. Igitur summa omnium planorum terminantium solidum ACE erit ad summam omnium planorum, quibus solidum *ace* continetur, in ratione *duplicata* lateris AF ad latus *af* (*Lib I* §. 144). Superficies autem solidi cujuscunque non differt a summa planorum omnium, quibus solidum ipsum clauditur. Ergo super-

ſuperficies ſolidi ACE, eſt ad ſuperficiem ſolidi ſibi ſimilis *ace* in ratione *duplicata* lateris AF ad latus *af*: Superficies itaque &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Superficies ſolidorum ſimilium, quæ planis rectilineis terminantur, ſunt directe inter ſe, ut duo qualibet ipſorum plana ſimilia.

103. Superficies nimirum ſolidi ACE erit ad ſuperficiem ſolidi ſimilis *ace*, ut planum AMF ad planum ſibi ſimile *amf*. Patet ex ipſa demonſtratione theorematis.

COROLLARIUM II.

Superficies priſmatum, & pyramidum ſimilium, quorum baſes ſint plana ſimilia, ſunt directe ſe, ut eorum baſes.

104. Sequitur ex præcedenti.

COROLLARIUM III.

Superficies priſmatum, & pyramidum ſimilium, quarum baſes ſint plana ſimilia, ſunt in ratione duplicata altitudinum.

105. Sunt enim altitudines, ut duo quælibet latera homologa planorum terminantium (§. 72., 73.).

COROLLARIUM IV.

Superficies polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt in ratione duplicata duorum laterum planorum ſimilium, quibus polyedra ipſa continentur

106. Polyedra namque regularia ejuſdem generis ſunt ſimilia (§. 3.), & duo quælibet terminantium planorum latera ſunt homologa (§. 5.).

COROLLARIUM V.

Superficies polyedrorum regularium ejuſdem generis ſunt in ratione duplicata ſuorum radiorum, & cæterorum.

107. Sunt enim tam radii, quam cateti polyedrorum regularium ejuſdem generis, ut duo quælibet homologa latera planorum terminantium (§. 99. 100.).

Co-

COROLLARIUM VI.

Superficies solidorum similium, quæ rectilineis planis continentur, sunt inter se, ut quadrata laterum homologorum planorum similium ipsa solida terminantium.

108. Quadrata namque illorum laterum sunt in ratione eorundem *duplicata* (*Lib. IX. §.* 172.).

COROLLARIUM VII.

Superficies prismatum, & pyramidum similium, quarum bases sint plana similia, sunt, ut quadrata altitudinum.

109. Ostenditur, ut præcedens.

COROLLARIUM VIII.

Superficies polyedrorum regularium ejusdem generis sunt, ut quadrata suorum radiorum, & cæterorum.

110. Eodem ostenditur principio, quo *coroll.* VI. demonstravimus.

COROLLARIUM IX.

Si ratio duorum laterum homologorum planorum similium similia solida terminantium continuetur usque ad tertium terminum, superficies ipsorum solidorum erunt inter se, ut illorum terminorum primus ad tertium.

111. Si nimirum in solidis similibus ACE, *ace* latus AF plani AMF fuerit ad latus sibi homologum *af* similis plani *amf*, ut quantitas x ad quantitatem y, si ponatur $\div x . y . z$, superficies solidi ACE erit ad superficiem solidi *ace*, ut primus illorum trium terminorum ad tertium, videlicet ut x ad z. Constat enim, terminum x esse ad z in ratione *duplicata* ipsius x ad secundum y (*Lib. I. §.* 177.).

COROLLARIUM X.

Si ratio altitudinum prismatum, & pyramidum similium, quorum bases sint plana similia, continuetur usque ad tertium terminum, horum solidorum superficies erunt respective inter se, ut primus ad tertium.

112. Demonstratur, ut præcedens.

Co-

Corollarium XI.

Si ratio tam radiorum, quam cathetorum in polyedris regularibus ejusdem generis continuetur usque ad tertium terminum, superficies ipsorum polyedrorum erunt directe inter se, ut primus ad tertium.

113. Patet ex demonstratione *coroll.* IX.

Corollarium XII.

Duo qualibet latera homologa planorum similium, quibus similia solida continentur, sunt in ratione subduplicata superficierum ipsorum solidorum.

114. Quandoquidem cum superficies hujusmodi sint in ratione *duplicata* suorum laterum homologorum (§. 102.), ipsa vicissim latera erunt in ratione ipsarum superficierum *subduplicata* (*Lib. I §. 59.*)

Corollarium XIII.

Altitudines prismatum, & pyramidum similium, quarum bases sint plana similia, sunt in ratione superficierum earundem subduplicata.

115. Evincitur eodem modo, quo præcedens.

Corollarium XIV.

Duo qualibet latera planorum, quibus polyedra regularia ejusdem generis terminantur, sicuti etiam ipsorum radii, & catheti sunt in ratione subduplicata superficierum ipsorum polyedrorum.

116. Hujus demonstratio eadem est cum demonstratione *coroll.* XII.

Lemma II.

Sphæra est polyedrum regulare infinitis planis magnitudinis infinite parvæ comprehensum.

117. Perspicuum namque est, polyedrum regulare magis ac magis ad sphæram accedere, quo numero plura, & magnitudine exiliora sunt plana, quibus polyedrum terminatur, ut proinde si hujusmodi plana terminantia sint numero infinita, & infinite exigua, polyedrum ipsum a sphæra difer-

discerni minime possit. Ergo sphæra spectari ac summi potest veluti polyedrum regulare planis numero infinitis, & magnitudine infinite parvis comprehensum.

Corollarium I.

Sphæræ catetus non differt ab illius radio.

118. Etenim recta, quæ intelligitur cadere a centro sphæræ in unum ex illis planis infinite parvis, quibus sphæra terminatur, eique ad perpendiculum incumbere, non differt a sphæræ radio, nisi quantitate, quæ omni assignabili minor est, scilicet quantitate infinite parva, atque adeo nulla (*Lib. II.* §. 52.). Ergo sphæræ catetus non differt ab illius radio.

Corollarium II.

Omnes sphæræ sunt polyedra regularia ejusdem generis.

119. Idem namque est numerus planorum regularium, quibus omnes sphæræ continentur.

Corollarium III.

Sphæræ sunt polyedra sibi mutuo similia.

120. Omnia siquidem polyedra regularia ejusdem generis sunt sibi mutuo similia (§ 3.).

Corollarium IV.

Omnes sphæræ sunt sibi mutuo similes.

121. Sequitur manifeste ex præcedenti.

Theorema XX.

Sphærarum superficies sunt inter se in ratione duplicata suorum radiorum.

122. Sint duæ sphæræ ABCD, *abcd*, quarum radii sint rectæ ED, *ed*. Dico, superficiem sphæræ ABCD esse ad superficiem sphæræ *abcd* in ratione *duplicata* radii ED ad radium *ed*.

Demonstratio I.

Sphæræ ABCD, *abcd* sunt polyedra regularia ejusdem generis (§. 119.).

Super-

Superficies autem polyedrorum regularium ejusdem generis sunt inter se in ratione *duplicata* suorum radiorum (§. 107.). Ergo superficies quoque sphærarum ABCD, *abcd* sunt in ratione suorum radiorum ED, *ed duplicata*.

Demonstratio II.

Cum enim sphæræ superficies consurgat ex completa revolutione semiperipheriæ circularis circa quiescentem diametrum (*Lib.* XI. §. 49.), quam metitur integra peripheria circuli in ipsa sphæra maximi (§. 50.) superficies sphæræ ABCD erit ad superficiem sphæræ *abcd* in ratione composita ex ratione semiperipheriæ ABC ad semiperipheriam *abc*, ex quibus circa quiescentes diametros AC, *ac* rotantibus producuntur, & ex ratione integræ peripheriæ circuli maximi ABCD ad integram peripheriam circuli maximi *abcd* (*Lib.* I. §. 169.). Est autem tam semiperipheria ABC ad semiperipheriam *abc* (*Lib.* IX. §. 150.), quam integra peripheria ABCD ad integram peripheriam *abcd*, ut radius ED ad radium *cd* (§. 154.). Ergo superficies sphæræ ABCD erit superficiem sphæræ *abcd* in ratione, quæ consurgit ex ratione radii ED ad radium *ed* semel ducta in seipsam. Hæc autem est ratio ipsorum radiorum *duplicata* (*Lib.* I. §. 55.). Ergo superficies sphæræ ABCD est ad superficiem sphæræ *abcd* in ratione *duplicata* radii ED ad radium *ed*. Itaque sphærarum &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Sphæræ elementa decrescunt centrum versus in ratione duplicata imminuti radii.

123. Sphæricæ namque superficies, quæ sphæræ soliditatem constituunt (*Lib. XI.* §. 48.), sunt inter se in ratione *duplicata* radiorum, atque adeo in ratione *duplicata* imminuti radii centrum versus superficies ipsæ minuuntur.

COROLLARIUM II.

Elementa sectoris sphærici decrescunt centrum versus in ratione duplicata imminuti radii.

124. Elementa enim sectoris sphærici sunt partes similes superficierum sphæricarum, quæ sphæræ soliditatem constituunt (§. 64.); ac proinde sunt directe inter se, ut ipsæ sphæricæ superficies (*Lib. I.* §. 126.).

Corollarium III.

Sphærarum superficies sunt in ratione suarum diametrorum duplicata.

125. Ratio namque diametrorum a ratione radiorum diversa non est (§. 127.).

Corollarium IV.

Superficies sphærarum sunt inter se, ut quadrata suarum diametrorum, & semidiametrorum.

Fig. 17. Fig. 18. Tab. 10. 126. Nimirum superficies sphæræ ABCD est ad superficiem sphæræ *abcd*, ut quadratum AF diametri AC ad quadratum *af* diametri *ac*, sicuti etiam ut quadratum EG radii EC ad quadratum *eg* radii *ec*. Sunt enim hujusmodi quadrata in ratione suorum laterum *duplicata* (*Lib. IX.* §. 172.).

Corollarium V.

Superficies sphærarum sunt directe inter se, ut maximi ipsarum sphærarum circuli.

127. Ut si maximus circulus sphæræ ABCD sit MNPQ, & maximus circulus sphæræ *abcd* sit *mnpq*, superficies sphæræ ABCD erit ad superficiem sphæræ *abcd*, ut circulus MNPQ ad circulum *mnpq*. Etenim diametri MP, *mp* circulorum MNPQ, *mnpq* diversæ non sunt a diametris ipsarum sphærarum ABCD, *abcd* (*Lib. XII.* §. 49.). Sunt autem circuli, ut quadrata suarum diametrorum (*Lib. IX.* §. 186.). Ergo circuli MNPQ, *mnpq* sunt quoque, ut quadrata diametrorum AC, *ac* sphærarum ABCD, *abcd*. Superficies autem sphærarum ABCD, *abcd* sunt, ut quadrata diametrorum AC, *ac* (§. 126.). Ergo erunt etiam, ut quadrata diametrorum MP, *mp*, atque adeo ut maximi ipsarum circuli MNPQ, *mnpq*.

Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19. Fig. 02. Tab. 10.

Corollarium VI.

Si ratio diametrorum, vel semidiametrorum duarum sphærarum continuetur usque ad tertium terminum, superficies unius sphæræ erit ad superficiem alterius, ut illorum primus ad tertium.

128. Primus enim illorum terminorum est ad tertium in *duplicata* ratione primi ad secundum (*Lib. I.* §. 177.).

Co-

Corollarium VII.

Tam diametri, quam semidiametri sphærarum sunt in ratione subduplicata superficierum earumdem.

129. Id enim ex eo aperte sequitur, quod ex ratione tam diametrorum, quam semidiametrorum semel in se ducta ratio ipsarum superficierum consurgat (§. 59.).

Theorema XXI.

Prismata, & pyramides similes sunt respective inter se in ratione triplicata laterum homologorum duorum planorum similium, quibus continentur.

I.

130. Sint duo prismata similia AE, *ae*, quorum homologa latera sint EF, *ef*. Dico, prisma AE esse ad prisma *ae* in ratione *triplicata* lateris EF ad latus *ef*. Fig. 3. Fig. 4. Tab. 9.

Demonstratio.

Duo similia plana DEF, *def* spectentur veluti bases ipsorum prismatum, eorumque altitudines sint rectæ MN, *mn*: cum igitur prismata sint inter se in ratione composita basium, & altitudinum (§. 53.), prisma AE erit ad prisma *ae* in ratione composita basis DEF ad basim *def*, & ex ratione altitudinis MN ad altitudinem *mn*. Sunt autem bases DEF, *def* in ratione *duplicata* laterum homologorum EF, *ef* (*Lib. IX.* §. 181.); eademque est ratio altitudinum MN, *mn*; quæ laterum EF, *ef* (§. 72.). Ergo prisma AE erit ad prisma *ae* in ratione composita ex ratione laterum EF, *ef*, & ex eadem *duplicata*. Hæc autem est ratio *triplicata* ipsorum laterum EF, *ef* (*Lib.* I. §. 55.). Ergo prismata AE, *ae* sunt in ratione laterum EF, *ef* *triplicata*.

II.

131. Sint duæ pyramides similes DMF, *dmf*, quarum basium similium DEF, *def* homologa latera sint EF, *ef*. Dico pyramidem DMF esse ad pyramidem *dmf* in ratione *triplicata* homologorum laterum EF, *ef*.

Demonstratio I.

Coincidit cum præcedenti. Sunt enim pyramides, quemadmodum prismata,

mata, in ratione compositam basium, & altitudinum (§. 56.).

Demonstratio II.

Super easdem bases DEF, *def*, & sub iisdem altitudinibus MN, *mn* constituta habeantur duo similia prismata AE, *ae*. Res perspecta est, pyramidem DMF esse ad pyramidem *dmf*, ut prisma AE ad prisma *ae* (§. 33). Est autem prisma AE ad prisma *ae* in ratione *triplicata* homologorum laterum EF, *ef* (§ 130.). Ergo in eadem quoque ratione erunt pyramides DMF, *dmf*. Itaque prismata &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Prismata, & pyramides similes, quarum bases sint plana similia, sunt respective inter se in ratione triplicata suarum altitudinum.

132. Sunt enim altitudines prismatum, & pyramidum similium, ut duo quælibet homologa ipsorum latera (§. 72. 73.).

COROLLARIUM II.

Parallelepipeda similia sunt in ratione triplicata suorum laterum homologorum.

133. Similia namque parallelepipeda sunt species prismatum similium; cum omne parallelepipedum sit prisma (*Lib. XI. §. 23.*).

COROLLARIUM III.

Cubi sunt in ratione triplicata suorum laterum.

134. Omnes enim cubi sunt parallelepipeda similia, cum omnis cubus sit parallelepipedum (§. 28.), & omnes cubi sint sibi mutuo similes (§. 4.). Omniaque insuper latera unius sunt homologa lateribus alterius (§. 5.).

COROLLARIUM IV.

Omnia tetraedra sunt in ratione suorum laterum triplicata.

135. Etenim omnia tetraedra sunt pyramides, & quidem similes (§. 4.); atque omnia unius tetraedri latera sunt alterius lateribus homologa (§. 5.).

Co-

COROLLARIUM V.

Omnia prismata similia a cubis diversa, omnesque pyramides similes sunt, ut cubi suorum laterum homologorum.

136. Omnia namque hujusmodi solida similia sunt *respective* inter se in ratione *triplicata* suorum laterum homologorum, in qua itidem ratione sunt eorumdem laterum cubi (§. 134.).

COROLLARIUM VI.

Si ratio laterum homologorum in prismatibus, parallelepipedis, & pyramidibus similibus, atque cubis continuetur usque ad quartum terminum, solidum erit ad solidum, ut illorum primus ad quartum.

137. Ut si latus EF prismatis AE fuerit ad latus sibi homologum *ef* similis prismatis *ae*, quemadmodum est *u* ad *x*, & fiat ∺ *u. x. y. z*, solidum AE erit ad simile solidum *a, e* ut primus terminus *u* ad quartum *z*. Est enim *u* ad *z* in ratione *triplicata* primi *u* ad secundum *x* (*Lib. I.* §. 177.). Fig. 3. Fig. 4. Tab 9.

SCHOLION.

138. Hinc apparet, ex inventione *duarum mediarum proportionalium* inter duas datas rectas lineas dependere solutionem eximii problematis de *cubi duplicatione*, quod Priscorum ingenia maxime torsit, quodque ab Apollinis Deliaci responso *Deliacum* dictum est, quatenus nempe is consulentibus respondit, tum demum Athenas peste, quæ id temporis grassabatur, liberatum iri, cum ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur.

THEOREMA XXII.

Cylindri, & coni similes sunt respective inter se in ratione duplicata diametrorum suarum basium.

I.

139. Sint duo similes cylindri FD, *fd*. Dico, illos esse inter se in ratione *triplicata* diametrorum CD, *cd* suarum basium.

Demonstratio.

Cylindri FD, *fd* sunt in ratione composita ex ratione basium CD, *cd*; & ex ratione altitudinum OR, *or* (§. 57.). Circuli autem basium sunt

Fig. 5. Fig. 6. Tab. 9. in ratione *duplicata* diametrorum CD, *cd* (*Lib. IX. §. 186.*), & ratio altitudinum OR, *or* diversa non est a ratione diametrorum CD, *cd* (§. 77.). Ergo cylindri FD, *fd* erunt inter se in ratione composita ex ratione diametrorum CD, *cd*, & ex eadem *duplicata*. Hæc autem ratio est *triplicata* ipsarum diametrorum CD, *cd* (*Lib. I. §. 55.*). Ergo cylindri FD, *fd* sunt in ratione diametrorum suarum basium *triplicata*.

II.

140. Sint duo coni similes COD, *cod*. Dico, eos quoque esse inter se in ratione *triplicata* diametrorum CD, *cd* suarum basium.

Demonstratio I.

Eadem est cum præcedenti. Etenim coni, quemadmodum cylindri, sunt in ratione composita basium, & altitudinum (§. 58.), & ratio altitudinum in conis similibus diversa non est a ratione diametrorum suarum basium (§. 78.).

Demonstratio II.

Enimvero, si super easdem bases CD, *cd*, & sub iisdem altitudinibus OR, *or* constituantur similes cylindri FD, *fd*, coni COD, *cod* erunt inter se, ut ipsi cylindri FD, *fd* (§. 34.). Cylindri autem FD, *fd* sunt in ratione *triplicata* diametrorum CD, *cd* suarum basium (§. 139.). Ergo in eadem itidem ratione erunt coni COD, *cod*. Itaque cylindri &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Cylindri, & coni similes sunt respective inter se in ratione triplicata semidiametrum suarum basium.

141. Semidiametri namque circulorum sunt inter se, ut eorundem diametri (*Lib. I. §. 126.*).

Corollarium II.

Cylindri, & coni similes sunt respective inter se in ratione triplicata tum axium, tum altitudinum.

142. Etenim ratio tum axium, tum altitudinum in cylindris, & conis similibus diversa non est a ratione diametrorum suarum basium (§. 8.).

Co-

Corollarium III.

Cylindri, & coni similes sunt respective inter se, ut cubi altitudinum; axium, diametrorum, & semidiametrorm suarum basium.

143. Sunt enim cubi in ratione *triplicata* suorum laterum (§. 134.).

Corollarium IV.

Si ratio altitudinum, vel axium, aut diametrorum, vel semidiametrorum basium in cylindris, & conis similibus continuetur usque ad quartum terminum, cylindrus erit ad cylindrum, & conus ad conum, ut illorum terminorum primus ad quartum.

144. Quandoquidem primus illorum terminorum est ad quartum in ratione *triplicata* primi ad secundum (*Lib. I. §.* 177.).

Corollarium V.

Axes, & altitudines, sicuti etiam diametri, & semidiametri basium cylindrorum, & conorum similium sunt respective inter se in ratione subtriplicata ipsorum corporum.

145. Sunt enim inter se in ea ratione, ex qua ducta in seipsam *duplicatam* ratio ipsorum corporum efficitur.

Theorema XXIII.

Polyedra similia sunt in ratione triplicata laterum homologorum duorum planorum similium, quibus continentur.

146. Sint duo polyedra similia ACE, *ace*, & AF, *af* sint latera homologa planorum similium AMF, *amf*. Dico, polyedrum ACE esse ad polyedrum *ace* in ratione *triplicata* laterum AF, *af*. Fig. 7. Fig 8. Tab. 9.

Demonstratio.

Cum polyedra ACE, *ace* resolvi possint in pyramides numero æquales, & magnitudine similes (§. 91.), eademque sit ratio omnium laterum homologorum planorum similium, quibus polyedra ipsa terminantur (§. 71.), atque insuper pyramides similes sint in ratione *triplicata* suorum laterum homologorum (§. 131.), quælibet pyramis illarum, in quas resolvitur polyedrum ACE, erit ad quamlibet sibi similem illarum pyramidum, in

quas polyedrum *ace* dividitur, in ratione *triplicata* laterum homologorum AF, *af*; atque adeo omnes simul pyramides constituentes polyedrum ACE erunt ad eas omnes pyramides, simul itidem sumtas, quæ polyedrum *ace* constituunt, in ratione ipsorum laterum AF, *af triplicata* (*Lib. I.* §. 144.). Igitur polyedrum ACE erit ad polyedrum *ace* in ratione *triplicata* homologorum laterum AF, *af*. Polyedra itaque similia &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Polyedra similia sunt directe inter se, ut cubi laterum homologorum duorum planorum similium, quibus terminantur.

147. Sunt enim cubi illorum laterum in ratione eorundem triplicata (§. 134.).

COROLLARIUM II.

Polyedra regularia ejusdem generis sunt directe inter se in ratione triplicata laterum homologorum.

148. Omnia siquidem polyedra regularia ejusdem generis sunt sibi mutuo similia (§. 3.); atque adeo in ratione *triplicata* suorum laterum, utpote quæ omnia sunt sibi mutuo homologa (§. 5.).

COROLLARIUM III.

Polyedra regularia ejusdem generis sunt inter se in ratione triplicata suorum radiorum, & cæterorum.

149. Etenim radii, & cæteri polyedrorum regularium ejusdem generis sunt inter se, ut duo quælibet ipsorum latera (§ 99. & 100.). Hæc autem polyedra sunt in ratione suorum latera *triplicata* (§. 148.). Ergo erunt quoque in ratione *triplicata* suorum radiorum, & cæterorum,

COROLLARIUM IV.

Polyedra regularia ejusdem generis sunt inter se, ut cubi suorum laterum, nec non radiorum, & cæterorum.

150. Siquidem horum omnium cubi sunt in ratione eorundem *triplicata* (§. 134.).

Co-

COROLLARIUM V.

Duo qualibet ſolida rectilinea ſimilia ſunt in ratione triplicata laterum homologorum duorum planorum ſimilium, quibus continentur.

151. In hac enim ratione demonſtravimus eſſe duo priſmata ſimilia (§. 130.), duas ſimiles pyramides (§. 131.), duoque ſimilia polyedra (§. 146.). Ad hæc autem omnia ſolida ſimilia rectilinea reducuntur. Ergo &c.

COROLLARIUM VI.

Si ratio duorum laterum homologorum planorum rectilineorum ſimilium, quibus ſimilia ſolida terminantur, continuetur uſque ad quartum terminum, ſolidum erit ad ſolidum, ut illorum primus ad quartum.

152. Eſt enim primus illorum quatuor terminorum ad quartum in ratione *triplicata* primi ad ſecundum (*Lib. I. §. 177.*).

COROLLARIUM VII.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint latera homologa ſolidorum ſimilium, ſolida ipſa erunt proportionalia.

153. Ut ſi quatuor rectæ proportionales *a*, *b*, *c*, *d*, fuerint latera homologa ſolidorum ſimilium A, B, C, D, ſolidi ipſa A, B, C, D, erunt inter ſe proportionalia. Cum enim ſit per hypotheſim *a*. *b* $=$ *c*. *d*, ſicuti ſolidum A eſt ad ſolidum B in ratione *triplicata* primæ *a* ſecundam *b* (§. 151.), erit ſolidum A ad ſolidum B in ratione *triplicata* etiam tertiæ *c* ad quartam *d*. Eſt autem ſolidum quoque C ad ſolidum D in ratione *triplicata* earundem *c*, *d*. Ergo erit A. B $=$ C. D.

COROLLARIUM VIII.

Si in polyedris regularibus ejuſdem generis ratio radiorum, vel catetorum continuetur uſque ad quartum terminum, erit polyedrum ad polyedrum, ut primus illorum terminorum ad quartum.

154. Demonſtratio eadem eſt cum demonſtratione coroll. VI.

COROLLARIUM IX.

Latera homologa solidorum rectilineorum similium sunt in ratione ipsorum solidorum subtriplicata.

155. Ipsorum namque laterum ratio ea est, ex qua ducta in seipsam *duplicatam* ratio ipsorum solidorum efficitur.

COROLLARIUM X.

Radii, & cæteri polyedrorum regularium ejusdem generis sunt in ratione ipsorum polyedrorum subtriplicata.

156. Coincidit cum præcedenti.

COROLLARIUM XI.

Si fuerint quatuor solida similia inter se proportionalia, eorum latera homologa erunt proportionalia.

157. Ut si fuerint quatuor solida rectilinea proportionalia A, B, C, D, quorum latera homologa sint *a*, *b*, *c*, *d*, erit *a*. *b* = *c*. *d*. Cum enim sit A. B = C. D, quemadmodum latera *a*, *b* sunt in ratione *subtriplicata* duorum solidorum A, B (§. 115.), erunt etiam in ratione *subtriplicata* duorum solidorum C, D (§. 155.). Sunt autem etiam duo *c*, *d* in ratione *subtriplicata* solidorum C, D. Ergo erit *a*. *b* = *c*. *d*.

THEOREMA XXIV.

Sphæræ sunt inter se in ratione triplicata suorum radiorum.

158. Sint duæ sphæræ ABCD, *abcd*, quarum radii sint rectæ ED, *ed*. Dico, sphæram ABCD esse ad sphæram *abcd* in ratione *triplicata* radii ED ad radium *ed*.

Demonstratio I.

Fig. 17. Fig. 18. Tab. 10. Sphæræ considerari possunt veluti duo polyedra regularia ejusdem generis (§. 119.). Hujusmodi autem polyedra sunt inter se in ratione *triplicata* suorum radiorum (§. 149.). Ergo in *triplicata* quoque suorum radiorum ED, *ed* ratione erunt sphæræ ABCD, *abcd*.

De-

Demonstratio II.

Quoniam ſphæra ABCD oritur ex completa revolutione ſemicirculi ABC circa quieſcentem diametrum AC, quam metitur peripheria circuli in ipſa ſphæra maximi ABCD, & ſphæra *abcd* ex rotatione ſemicirculi *abc* circa diametrum quieſcentem *ac*, cujus rotationis menſura eſt peripheria circuli itidem maximi *abcd* (*Lib. XI. §.* 47, 50.), ſphæra ABCD erit ad ſphæram *abcd* in ratione compoſita ex ratione ſemicirculi ABC ad ſemicirculum *abc*, & ex ratione integræ peripheriæ circuli maximi ABCD ad peripheriam circuli maximi *abcd* (*Lib I. §.* 169.). Semicirculus autem ABC eſt ad ſemicirculum *abc* in ratione *duplicata* radii ED ad radium *ed* (*Lib. IX. §.* 187.), & peripheria circuli ABCD eſt ad peripheriam circuli *abcd*, ut radius ED ad radium *ed* (*§.* 154.). Ergo ratio ſphæræ ABCD ad ſphæram *abcd* eſt compoſita ex ratione radiorum ED, *ed*, & ex ratione eorundem *duplicata*. Hæc autem eſt ratio ipſorum radiorum *triplicata* (*Lib. I. §.* 55.). Ergo ſphæra ABCD eſt ad ſphæram *abcd* in ratione *triplicata* radii ED ad radium *ed*. Itaque ſphæræ &c. quod erat oſtendendum.

Corollarium I.

Sphæræ ſunt in ratione triplicata ſuarum diametrorum.

159. Sphærarum namque diametri ſunt directe inter ſe, ut earundem ſemidiametri (*Lib. I. §.* 127.).

Corollarium II.

Sphæræ ſunt directe inter ſe, ut cubi ſuarum diametrorum, & ſemidiametrorum.

160. Cubi ſiquidem tam diametrorum, quam ſemidiametrorum ſunt in ratione ipſarum triplicata (*§.* 134.).

Corollarium III.

Si ratio diametrorum, vel ſemidiametrorum duarum ſphærarum continuetur uſque ad quartum terminum, ſphæra eſt ad ſphæram, ut illorum primus ad quartum.

161. Primus enim quatuor terminorum continuo proportionalium eſt ad quartum in ratione *triplicata* primi ad ſecundum (*Lib. I. §.* 177.).

COROLLARIUM IV.

Sphæræ, quarum diametri sint proportionales, inter se quoque sunt proportionales.

162. Demonstratur eodem modo, quo §. 153.

COROLLARIUM V.

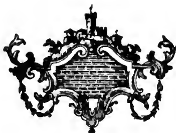
Diametri, & semidiametri sphærarum sunt in ratione ipsarum sphærarum subtriplicata.

163. Ratio namque diametrorum, & semidiametrorum duarum sphærarum hujusmodi est, ut ex in illa ducta seipsam *duplicatam* ipsarum sphærarum ratio consurgat.

COROLLARIUM VI.

Si fuerint quatuor sphæræ proportionales, earum quoque diametri, & semidiametri erunt proportionales.

164. Hujus demonstratio coincidit cum demonstratione §. 157.



ELE-

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER XIV.

De ſolidorum dimenſione,

QUemadmodum ea practicæ Geometriæ pars, quæ modum exhibet dimetiendi figuras planas, *Planimetria* dicitur, ita illa, in qua de ſolidorum dimenſione diſſeritur, *Stereometria* nuncupatur. Hujus ergo fundamentalia principia hic exhibemus, & demonſtramus una cum nonnullis ex pulcherimis diviniſque prorſus inventis, quæ duobus libris *de ſphæra, & cylindro* Archimedes tradidit.

DEFINITIO I.

1. *Digitus, palmus, pes, & pollex cubici ſunt cubi, quorum latus unius digiti, palmi, pedis, aut pollicis longitudini eſt æquale.* Ut ſi latus KL cubi KP fuerit digitalis longitudinis, cubus KP dicetur *digitus cubicus*; ſi pedalis, *pes cubicus*, atque ita de ceteris. Fig. 10. Tab. 10.

HYPOTHESIS I.

2. Magnitudo, ſive quantitas cujuſvis ſolidi determinatur per numerum digitorum, palmorum, pedum, vel pollicum cubicorum, quos area ipſius ſolidi adæquat. Illius vero ſuperficiei valor definitur per numerum digitorum, palmorum, pedum, aut pollicum quadratorum, cui ſuperficies ipſa eſt æqualis.

DEFINITIO II.

3. *Magnitudo itaque, ſive quantitas cujuſvis ſolidi dicitur nota, cum notum nobis fuerit, quod digitos, palmos, pedes, vel pollices cubicos illius area comprehendat. Notus quoque dicitur valor ſuperficiei dati ſolidi, cum nobis innoteſcit, quod digitos, palmos, pedes, aut pollices quadratos ipſa ſuperficies complectatur.*

HYPOTHESIS II.

4. Pro definienda ſoliditate corporeum, quæ a priſmate, & cylindro ſunt

sunt diversa, ea ad prisma, vel ad cylindrum, prout opus fuerit, primo revocabimus. Similiter pro determinanda solidorum superficie, superficiem ipsam ad rectangulum reducemus. Constat enim, facili negotio valorem rectanguli palam fieri. Constabit quoque, soliditatem prismatis, & cylindri facilime in aperto poni.

DEFINITIO III.

5. Quemadmodum si semicirculus ACB in gyrum agatur circa quiescentem diametrum AB, producitur sphæra ACBD, ita si circa eandem diametrum revolvatur semiquadratum AEFB semicirculo ACB circumFig. 1 scriptum, efficitur cylindrus rectus EFGH, qui sphæræ ACBD *cir-* Tab. 11. *cumscriptus* dicitur.

COROLLARIUM I.

6. *Axis, sive altitudo cylindri recti sphæræ circumscripti diversa non est a diametro inscriptæ sphæræ.* Est enim diameter semicirculi, ex cujus revolutione inscripta sphæra efficitur.

COROLLARIUM II.

Fig. 1. 7. *Diameter basis cylindri recti sphæræ circumscripti est æqualis diametro* Fig 11. *ipsius sphæræ.* Diameter nimirum FG baseos cylindri recti EG sphæræ ACBD circumscripti adæquat diametrum AB ipsius sphæræ. Utraque enim diameter est dupla lateris FB semiquadrati genitoris AEFB.

COROLLARIUM III.

Fig. 1. 8. *Basis cylindri recti sphæræ circumscripti est æqualis circulo maximo ip-* Tab. 11. *sius sphæræ.* Videlicet circulus baseos FG cylindri recti EFGH circumscripti sphæræ ACBD est æqualis circulo maximo ipsius sphæræ. Cum enim diameter baseos FG non differat a diametro sphæræ inscriptæ ACBD (§. 7.), circulus baseos FG æquabit circulum in sphæra, qui per ipsius sphæræ centrum transit. Circulus autem, qui per sphæræ centrum transit, est maximus in ipsa sphæra (*Lib. XII.* §. 45.). Ergo circulus baseos FG cylindri EG sphæræ ACBD circumscripti adæquat circulum maximum ipsius sphæræ

COROLLARIUM IV.

9. *Axis, sive altitudo cylindri recti sphæræ circumscripti est æqualis diametro baseos ipsius cylindri.* Quandoquidem tam axis ipsius cylindri, quam diameter circuli baseos ejusdem adæquat diametrum inscriptæ sphæræ (§. 6.).

DE-

DEFINITIO IV.

10. Si quadratum CBDA, & quadrans circuli AMBD simul circa immotum latus AD revolvantur, sicuti ex revolutione quadrantis AMBD habetur hemisphærium BAE, ita ex rotatione completa quadrati CBDA emergit cylindrus rectus CBEF, qui hemisphærio BAE *circumscriptus* vocatur. Fig. 1. Tab. 11.

COROLLARIUM I.

11. *Circulus baseos cylindri recti hemisphærio circumscripti est circulus maximus sphæræ, cujus hemisphærium ipsum est una medietas*. Sphæra namque non dividitur bifariam, nisi a circulo per illius centrum transeunte (*Lib. XI. §. 53*), atque adeo in ipsa sphæra maximo (*Lib. XII. §. 45.*).

COROLLARIUM II.

12. *Diameter baseos cylindri recti hemisphærio circumscripti diversa non est a diametro baseos hemisphærii, sive sphæræ, cujus ipsum hemisphærium est una medietas*. Patet ex præcedenti.

COROLLARIUM III.

13. *Latus cylindri recti hemisphærio circumscripti adæquat radium ipsius hemisphærii*. Nimirum latus CB cylindri CE hemisphærio BAE circumscripti est æquale radio AD ipsius hemisphærii. Omnia enim latera quadrati genitoris ACBD sunt inter se æqualia (*Lib. VI. §. 2.*).

DEFINITIO V.

14. Si triangulo æquilatero ABC inscriptus sit circulus MEN, isque simul cum ipso triangulo circa communem axim AE revolvatur, duo fiunt solida, videlicet sphæra MEN, & conus æquilaterus BAC, qui ipsi sphæræ *circumscriptus* dicitur. Fig. 2. Tab. 11.

COROLLARIUM.

15. *Centrum sphæræ cono æquilatero inscriptæ diversum non est a centro ipsius coni*. Etenim centrum trianguli genitoris BAC non differt a centro circuli genitoris MEN ipsi triangulo inscripti (*Lib. IX. §. 16.*).

THEO-

THEOREMA I.

Superficies prismatis recti, seclusis basibus, adæquat rectangulum sub perimetro basis, & sub uno ipsius prismatis latere comprehensum.

Fig. 4. 16. Esto prisma rectum AF trilateram habens basim DEF. Dico, illius
Fig. 5. superficiem, seclusis basibus DEF, ABC, æquare rectangulum *ac* conten-
Tab. 11. tum sub recta *dc*, quæ sit æqualis perimetro basis DEF, & sub recta *ad*, quæ sit æqualis uni laterum AD ipsius prismatis.

Demonstratio.

Superficies prismatis AF, basibus seclusis, componitur ex tot rectangulis ejusdem altitudinis, quot sunt latera in perimetro basis DEF, nimirum ex tribus rectangulis æque altis ADEB, BEFC, CFDA (*Lib. XI. §.* 10). Tria autem hujusmodi rectangula æqualia sunt rectangulo *adcb*; cum posito semento *de* = DE, segmento *ef* = EF, & segmento *fc* = FD, ductisque rectis *me*, *nf* parallelis tum inter se, tum lateribus *ad*, *bc*, adeoque ad perpendiculum insistentibus basi *dc*, rectangulum *adcb* divisum sit in tria rectangula tribus rectangulis, quibus prismatica superficies AF continetur, æqualia, alterum alteri (*Lib. IX. §.* 88), utpote supra æquales bases *respective*, & sub eadem altitudine per hypothesim constituta. Ergo superficies prismatis AF, basibus seclusis, est æqualis rectangulo *adcb*. Itaque superficies prismatis &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Superficies prismatis recti, basibus seclusis, adæquat rectangulum sub perimetro basis, & sub illius altitudine comprehensum.

17. Altitudo siquidem prismatis recti ab illius latere diversa non est (*Lib. XI. §.* 21.).

COROLLARIUM II.

Si basis prismatis recti fuerit figura regularis, illius superficies, demtis basibus, erit ad basim, ut illius latus, sive altitudo, ad dimidium cateti basis.

18. Superficies nimirum recti prismatis AB, cujus basis CB sit penta-
Fig. 6. gonum regulare, erit ad basim ipsam, ut latus, sive altitudo AC, ad di-
Fig. 7. midium cateti *xy* ipsius basis. Etenim basis CB adæquat rectangulum *md*
Fig. 8. contentum sub recta *nd*, quæ sit æqualis perimetro ipsius basis, & sub
Tab. 11. recta *mn*, quæ sit æqualis dimidio cateti *xy*, sicuti adæquat rectangulum ex

ex dimidia parte perimetri in catetum (*Lib. X. §. 50.*). Superficies autem prismatis AB est æqualis rectangulo *ab* contento sub recta *cb* æquali perimetro basis CB, & sub recta *ac* æquali lateri, sive altitudini AC (§.16.). Ergo prismatica superficies AB, demtis basibus, est ad suam basim CB, ut rectangulum *ab* ad rectangulum *md*. Rectangulum porro *ab* est ad rectangulum *md* æqualis basis per hypothesim, ut latus, sive altitudo *ac*, ad latus, sive ad altitudinem *mn* (*Lib.* IX. §. 100.). Ergo prismatica quoque superficies AB, basibus seclusis, erit ad basim CB, ut latus, sive altitudo AC ad dimidium cateti *xy* ipsius basis.

PROBLEMA I.

Superficiem prismatis recti invenire.

19. Determinare oporteat superficiem recti prismatis AB.

Resolutio.

Perimeter basis CB ducatur in altitudinem, sive in latus AC, & facto adjiciatur valor basis CB bis sumtus. Summa erit valor totius superficiei prismaticæ AB quæsitus. Ut si perimeter basis CB fuerit $= a$, & altitudo $= b$, valor superficiei prismatis AB, demtis basibus, erit $= ab$; sique propterea valor basis CB fuerit $= mn$, tota prismatis superficies erit $= ab + 2mn$. Fig. 6. Tab. II.

Demonstratio.

Facto siquidem *ab* æquale est rectangulum sub perimetro basis, & sub latere ipsius prismatis comprehensum. Huic autem rectangulo æqualis est prismatica superficies AB, demtis basibus (§. 16.). Ergo &c.

PROBLEMA II.

Invenire superficiem prismatis inclinati.

Resolutio.

20. Determinetur valor omnium planorum, quibus prisma continetur. Horum omnium summa erit valor totius superficiei prismaticæ quæsitus.

Demonstratio.

Totum quippe æquale est omnibus suis partibus simul sumtis (*Syn. Alg.* §. 156.).

S C H O L I O N.

Pro determinanda cubi, qui species est prismatis, superficie, satis est, ut inveniatur area unius ex illis sex quadratis, quibus cubus comprehenditur, & valor hujusmodi per 6. multiplicetur. Factum enim dabit superficiem cubi quæsitam.

THEOREMA II.

Superficies pyramidis rectæ, cujus basis sit figura regularis, adæquat seclusa basi, triangulum rectangulum, cujus alterum latus eorum, quæ sunt circa angulum rectum, est æquale perimetro basis, alterum altitudini unius ex illis isoscelibus triangulis, quibus pyramis continetur.

21. Esto pyramis recta BAD, cujus basis BCD sit regularis. Dico illius superficiem, seclusa basi BCD, æquare triangulum rectangulum *abc*, cujus alterum latus *bc* positum circa angulum rectum *abc*, sit æquale perimetro basis BCD, alterum *ab* sit æquale altitudini *Ae* trianguli isoscelis CAD, quo simul cum aliis pyramis ipsa continetur.

Demonstratio.

Diviso latere *bd* in tria æqualia segmenta *bd*, *df*, *fc*, quemadmodum tria sunt latera æqualia, quibus basis BCD datæ pyramidis continetur, ductisque rectis *ad*, *af*, tria triangula *bad*, *daf*, *fac*, utpote super æquales bases, & sub eadem altitudine constituta, erunt inter se æqualia (*Lib.* IX. §.93.).
Fig. 9. Æqualia sunt autem inter se etiam tria triangula isoscelia, quibus superficies pyramidi BAD, seclusa basi, terminatur; estque triangulum *bad*
Fig. 10. Tab. 11 æquale triangulo CAD (*Ibidem*.); cum per hypothesim eadem sit utriusque basis, & altitudo. Ergo tria triangula *bad*, *daf*, *fac* simul sumta, æqualia erunt tribus triangulis CAD, DAB, BAC simul itidem sumtis, quibus, seclusa basi, continetur superficies pyramidis BAD; atque adeo triangulum *abc* superficiem ipsam æquabit, demta basi. Itaque superficies pyramidis &c. quod erat ostendendum.

C O R O L L A R I U M I.

Superficies pyramidis rectæ, cujus basis sit figura regularis, adæquat, seclusa basi, rectangulum contentum sub perimetro basis, & sub dimidia altitudine unius ex illis isoscelibus triangulis, quibus pyramis terminatur.

22. Superficies nimirum pyramidis rectæ BAD, cujus basis sit triangulum

lum regulare, adæquat, seclusa ipsa basi, rectangulum *mbcn* contentum sub recta *bc*, quæ sit æqualis dimidiæ altitudini *Ae* trianguli CAD. Rectangulo quippe *mbcn* æquale est triangulum *bac* (*Lib.* IX. §. 102.), cui superficies ipsius pyramidis, dempta basi, est æqualis. Fig. 9. Fig. 10. Tab. 11.

Corollarium II.

Superficies pyramidis rectæ, cujus basis sit figura regularis, seclusa basi, est ad ipsam basim, ut altitudo unius ex illis triangulis pyramidem terminantibus ad catetum ejusdem basis.

23. Videlicet superficies rectæ pyramidis BAD, seclusa basi BCD, est ad ipsam basim, quæ ponitur figura regularis, ut altitudo *Ae* trianguli CAD ad catetum *xe* ejusdem basis. Quandoquidem constitutis ex altitudine *Ae*, & ex perimetro basis BCD triangulo rectangulo *abc*, nec non ex cateto *xe*, & ex eodem perimetro triangulo rectangulo *xey*, erit triangulum *abc* ad triangulum *xey* ejusdem basis, ut altitudo, sive latus *ab* ad altitudinem, sive ad latus *xe* (§. 101.). Superficies autem pyramidis BAD, seclusa basi, est æqualis triangulo *abc* (§. 21.), & basis ipsa BCD adæquat triangulum rectangulum *xey* (*Lib.* X. §. 29.). Ergo superficies pyramidis BAD, seclusa basi BCD, est ad ipsam basim, ut altitudo *Ae* ad catetum ejusdem basis *xe*. Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11. Tab. 11.

PROBLEMA III.

Determinare superficiem pyramidis rectæ, cujus basis sit figura regularis.

24. Esto pyramis recta BAD, cujus basis BCD sit figura regularis. Determinare oporteat illius superficiem.

Resolutio.

Per dimidium altitudinis unius ex illis triangulis, quibus pyramis continetur, multiplicetur valor perimetri basis, & facto valor basis adiiciatur. Summa dabit superficiem quæsitam. Ut si altitudo *Ae* trianguli CAD fuerit $= m$, & perimeter basis BCD $= n$, valor superficiei pyramidis BAD, seclusa basi, erit $= \frac{mn}{2}$. Quamobrem si valor basis BCD fuerit $= pr$, tota superficies datæ pyramidis erit $= \frac{mn}{2} + pr$. Fig. 9 Tab. 11.

Demonstratio.

Patet ex §. 22. hujus.

PROBLEMA IV.

Determinare superficiem cujuscunque pyramidis

Resolutio.

25. Inveniatur valor singulorum triangulorum; quibus pyramis ipsa terminatur, nec non valor basis. Horum omnium summa erit superficies quæsita.

Demonstratio.

Valor enim totius diversus non est a valore omnium suarum partium simul sumtarum.

THEOREMA III.

Superficies cylindri recti, seclusis basibus, adæquat rectangulum sub peripheria basis, sub illius latere comprehensum.

26. Esto cylindrus rectus ACDB. Dico, illius superficiem, demtis basibus AB, CD, æquare rectangulum *acdb* sub recta *cd*, quæ sit æqualis perimetro basis CD, & sub recta *ac*, quæ sit æqualis lateri AC ipsius cylindri, comprehensum.

Demonstratio.

Cylindrus quippe ACDB est prisma rectum infinitorum laterum (*Lib.* XI. §. 70.). Superficies autem recti prismatis, seclusis basibus, est æqualis
Fig.12. rectangulo contento sub latere ipsius prismatis, & sub perimetro basis
Fig.13. (§. 16.). Ergo idipsum quoque verum est de superficie recti cylindri ACDB.
Tab.11. Superficies itaque cylindri &c. quod erat ostendendum.

SCHOLION.

27. Veritas hujus propositionis ex eo etiam patet, quod si superficiei cylindri recti aptetur charta, ut illi omnino congruat, tum ipsa charta in planum extendatur, rectangulum illa exhibeat, cujus basis æqualis est peripheriæ basis, altitudo vero lateri ipsius cylindri.

Co.

COROLLARIUM I.

Superficies cylindri recti, demtis basibus, æqualis est rectangulo contento sub peripheria basis, & sub illius axe.

28. Axis namque cylindri æqualis est ejusdem lateri (*Lib. XI. §.* 113.).

COROLLARIUM II.

Superficies cylindri recti, seclusis basibus, æqualis est rectangulo contento sub peripheria basis, & sub illius altitudine.

29. Etenim altitudo cylindri recti ab illius axe diversa non est (*Lib.* XI. §. 39.).

COROLLARIUM III.

Superficies cylindri recti, seclusis basibus, est ad circulum basis, ut latus, sive axis ipsius cylindri ad dimidium radii, sive ad quartam partem diametri ipsius basis.

30. Coincidit cum demonstratione tradita §. 18. hujus: Circuli namque catetus non differt ab illius radio (*Lib. IX. §.* 150.), utque alibi ostensum est, circulus æqualis est rectangulo comprehenso sub peripheria, & sub dimidia parte radii (*Lib. X. §.* 46.).

COROLLARIUM IV.

Superficies cylindri recti, cujus axis, sive altitudo sit æqualis diametro circuli basis, demtis basibus, est quadrupla circuli basis.

31. Ut si axis, sive altitudo xy cylindri recti ACDB fuerit æqualis diametro CD basis CD ipsius cylindri, cylindrica ipsa superficies, demtis basibus, erit quadrupla circuli CD. Superficies namque cylindrica ACDB, Fig. 12. seclusis basibus, est ad circulum basis CD, ut axis, sive altitudo xy ad Tab. 11. quartam partem diametri CD (§. 30.). Est autem per hypothesim xy $=$ CD. Ergo superficies cylindrica ACDB erit ad circulum basis CD, ut 4. ad 1.

COROLLAIRUM V.

Superficies cylindri recti sphæræ circumscripti, seclusis basibus, est quadrupla maximi circuli ipsius sphæræ.

32. Curva nimirum superficies cylindri recti EG sphæræ ACBD circum-

Fig. 1. Tab. 11. scripti est quadrupla circuli maximi ipsius sphæræ. Maximus namque circulus inscriptæ sphæræ ACBD est æqualis circulo basis FG ipsius cylindri (§. 8.)

COROLLARIUM VI.

Superficies cylindri recti, cujus axis sit æqualis diametro circuli basis, adæquat, seclusis basibus circulum ex diametro basis descriptum.

33. Si nimirum axis *xy* cylindri recti AD fuerit æqualis diametro CD basis, cylindrica superficies AD, basibus seclusis, æqualis erit circulo EG,
Fig. 12. cujus radius FE sit æqualis diametro CD basis, ipsius cylindri. Cum enim
Fig. 14 Tab. 11. radius FE circuli EG, sit duplus radii *y*C circuli basis CD, sintque circuli in ratione *duplicata* suorum radiorum (*Lib.* IX. §. 185.), circulus EG erit quadruplo major circulo basis CD (*Lib.* I. §. 55.). Curva autem cylindri AD superficies est quadrupla circuli baseos CD (§. 31.). Ergo superficies ipsa circulum adæquat EG (*Lib.* I. §. 103.).

COROLLARIUM VII.

Superficies cylindri recti sphæræ circumscripti, seclusis basibus, adæquat circulum descriptum ex diametro ipsius sphæræ.

34. Diameter namque inscriptæ sphæræ est æqualis diametro basis ipsius cylindri (§. 7.), quam quidem diametrum axis ejusdem cylindri itidem adæquat (§. 9.).

COROLLARIUM VIII.

Curvæ superficies cylindrorum rectorum æquales bases habentium sunt inter, ut eorundem axes, sive altitudines, seu latera.

35. Cum enim curva cylindri recti superficies æqualis rectangulo contento sub peripheria baseos, & sub axe, sive altitudine, seu latere (§. 28.). curvæ superficies cylindrorum rectorum æquales bases habentium erunt inter se, ut rectangula super æquales bases constituta. Hæc autem sunt, ut eorum altitudines (*Lib.* IX. §. 100.). Ergo &c.

COROLLARIUM IX.

Superficies curvæ cylindeorum rectorum, quorum axes, seu altitudines, siue latera sint æqualia, sunt directe inter se, ut peripheriæ basium.

36. Sunt enim inter se, ut rectangula æqualium altitudinum.

Co-

COROLLARIUM X.

Curvæ ſuperficies cylindrorum rectorum æquales axes, ſive altitudines, ſeu latera habentium ſunt inter ſe, ut baſium radii, & diametri.

37. Ratio namque tam radiorum, quam diametrorum diverſa non eſt a ratione peripheriarum (§. 154. 155.).

COROLLARIUM XI.

Si cylindrus rectus ſecetur plano baſi parallelo, curve ſegmentorum ſuperficies erunt inter ſe, ut ſegmenta axis, ſive lateris, ſeu altitudinis.

38. Si nimirum cylindrus rectus AD ſecetur plano *mn* baſi CD parallelo, curva ſuperficies ſegmenti *An* erit ſuperficiem curvam ſegmenti *mD*, ut ſegmentum axis *xz* ad ſegmentum axis *zy*, ſive ut ſegmentum lateris *Am* ad ſegmentum lateris *mC*. Segmenta namque *An*, *mD* ſunt cylindri baſium æqualium (*Lib.* XI. §. 82.). Fig. 12. Tab. 11.

PROBLEMA V.

Curvam cylindri recti ſuperficiem determinare:

39. Invenire oporteat ſuperficiem curvam recti cylindri AD.

Reſolutio.

Invento valore peripheriæ baſeos CD (*Lib.* X. §. 40.); multiplicetur per ipſum valor lateris AC. Factum dabit ſuperficiem quæſitam. Ut ſi peripheria baſis CD fuerit $= a$, & valor lateris AC $= b$, erit ab valor ſuperficiei cylindricæ AD, ſeclufis baſibus. Fig. 12. Tab. 11.

Demonſtratio.

Eſt enim ab valor rectanguli, cui cylindrica ipſa ſuperficies eſt æqualis (§. 26.).

THOREMA IV.

Superficies cylindri recti, seclusis basibus, aequalis est circulo, cujus radius est media proportionalis inter cylindri latus, & diametrum basis.

40. Inter latus AC cylindri recti AD, & diametrum CD basis CD sit media proportionalis recta FG. Dico, curvam cylindri AD superficiem æquare circulum HK ex illa recta descriptum.

Demonstratio.

Cum enim per hypothesim recta, sive radius FG sit media proportionalis inter latus AC, & diametrum basis CD, rectangulum ACDB æquale erit quadrato MG (*Lib.* IX. §. 111.). Rectangulo autem ACDB æquale est rectangulum EC *ab* contentum sub radio C*a* basis CD, & sub recta EC dupla lateris AC, adeoque super dimidiam basim, & sub dupla altitudine constitutum (§. 102.). Ergo rectangulum quoque EC *ab* æquale erit quadrato MG (*Syn. Algeb.* §. 259.); ac proinde latus, sive radius FG erit media proportionalis inter latus EC, & radium basis C*a* (*Lib.* IX. §. 118.).

Fig. 15. Fig. 16. Fig. 17. Tab. 11.

Rursus cum curva ipsius cylindri superficies adæquet rectangulum *cdfe* comprehensum sub recta *cd*, quæ sit æqualis lateri AC ipsius cylindri, & sub recta *df* æquali peripheriæ baseos CD (§. 26.), eadem quoque superficies æquabit triangulum rectangulum *dbf* super eandem basim *df*, & sub dupla altitudine *bd* constitutum (*Synop. Alg.* §. 261.), quod hujusmodi triangulum sit rectangulo *cdfe* æquale (*Lib.* IX. §. 102.). Circulus autem basis CD æqualis est triangulo rectangulo *dmf*, cujus altitudo *md* sit æqualis radio C*a*, & basis *df* ejusdem peripheriæ (*Lib.* X. §. 43.). Ergo curva cylindri AD superficies erit ad circulum basis CD, ut triangulum *dbf* ad triangulum *dmf*: cumque trangulum *dbf* sit ad triangulum *dmf*, ut recta *bd* ad rectam *md* (*Lib.* IX §. 101.), sive per hypothesim ut recta EC dupla lateris AC ad radium C*a* basis CD, curva ipsa cylindri superficies erit ad circulum basis CD, ut est recta EC ad rectam C*a* (*Lib.* I. §. 78.). Circulus porro HK est ad circulum basis CD, ut eadem ipsa recta EC, ad eandem C*a*; cum tam circulus HK sit ad circulum CD (*Lib.* IX. §. 185.), quam recta EC ad rectam C*a* in ratione *duplicata* radii, sive rectæ FG ad radium, sive ad rectam C*a* (*Lib.* I. §. 177.), ex eo nimirum, quod radius FG sit media proportionalis inter rectam EC, & radium C*a*, ut jam demonstravimus. Ergo curva cylindri AD superficies, circulusque Hk eandem ad circulum basis CD rationem habent (§. 76.), ac proinde sunt inter se æquales (§. 103.). Superficies itaque cylindri recti &c. quod erat ostendendum.

Co

Corollarium I.

Curva cylindri recti superficies adæquat circulum, cujus radius sit media proportionalis inter illius axim, & diametrum basis, sicuti etiam inter illius altitudinem, & eandem diametrum.

41. Axis namque cylindri est æqualis lateri (*Lib.* XI. §. 113.), & altitudo cylindri recti ab illius axe diversa non est (§. 39.).

Corollarium II.

Curva cylindri recti superficies est ad circulum basis, ut recta, quæ sit dupla lateris, axis, sive altitudinis, ad radium basis.

42. Demonstravimus enim, curvam cylindri AD superficiem esse ad circulum basis CD ut recta EC = 2AC ad rectam *Ca*, quæ est radius basis CD. Fig. 15. Tab. 11.

Theorema V.

Curva cylindri recti superficies est ad circulum basis, ut rectangulum per axim ad quadratum radii ejusdem basis.

43. Esto cylindrus rectus AD. Dico, curvam illus superficiem esse ad circulum basis CD, ut est rectangulum per axim ACDB, quod nempe sub latere cylindri, & sub diametro basis ejusdem continetur, ad quadratum *ya* radii *Ca* ejusdem basis.

Demonstratio.

Posita namque recta FG media proportionali inter latus AC, & diametrum CD, quadratum FMKG æquabit rectangulum ACDB (*Lib.IX.*§.121.). Fig. 15.
Circulus autem HK est ad circulum basis CD, ut quadratum FK ad quadratum *ya* (§. 188.). Ergo circulus HK erit ad circulum basis CD, ut rectangulum ACDB ad quadratum *ya* (*Lib. I.* §. 102.). Curva porro cylindri AD superficies adæquat circulum HK (§. 41.). Ergo ipsa eadem superficies erit quoque ad circulum basis CD, ut est rectangulum ACDB ad quadratum *ya* (*Lib. I.* §. 102.). Itaque curva &c. quod erat ostendendum. Fig. 26. Tab. 11.

THEOREMA VI.

Curvæ cylindrorum rectorum superficies sunt directe inter se, ut rectanguli per axim.

44. Sint duo cylindri recti AD, *ad*. Dico, curvam superficiem cylindri AD esse ad curvam superficiem cylindri *ad*, ut est rectangulum ACDB ad rectangulum *acdb*, quæ per illorum axim transeunt.

Demonstratio.

Posita namque recta FG media proportionali inter latus AC, & diametrum basis CD, sicuti etiam recta *fg* media proportionali inter latus *ac*, & diametrum basis *cd*, descriptisque circulis HK, *hk*, quorum illæ sint radii,
Fig. 15. nec non quadratis FK, *fk* super easdem constitutis, erit quadratum FK
Fig. 16. æquale rectangulo ACDB, & quadratum *fk* æquale rectangulo *acdb* (*Lib.*
Fig. 18. IX. §. 111.); ac proinde rectangulum ACDB erit ad rectangulum *acdb*, ut
Fig. 19. Tab. 11. quadratum FK ad quadratum *fk*. Circulus autem HK est ad circulum *hk*, ut est quadratum FK ad quadratum *fk* (§. 188.). Ergo circulus HK erit quoque ad circulum *hk*, ut rectangulum ACDB ad rectangulum *acdb* (*Lib.* I. §. 76.). Curva porro cylindri AD superficies adæquat circulum HK, & curva superficies cylindri *ad* circulum *hk* (§ 41.). Ergo curva itidem cylindri AD superficies erit ad curvam superficiem cylindri *ad*, ut est rectangulum ACDB ad rectangulum *acdb*. Itaque curvæ cylindrorum rectorum superficies &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Curvæ cylindrorum rectorum superficies sunt directe inter se, ut rectangula ex latere in radium basis.

45. Hujusmodi namque rectangula sunt directe inter se, ut rectangula per axim (*Lib.* I. §. 126.); cum sit illorum partem dimidiæ (*Lib.* IX. §. 95.).

LEMMA I.

Omnia latera coni recti sunt inter se æqualia.

46. In cono recto BAE spectentur latera AB, AC, AD, AE. Dico, ea esse inter se æqualia

Demonstratio.

Cum enim F conus sit rectus, illius axis AZ perpendicularis erit circulo basis

basis BE, ad cujus centrum z insistit (*Lib.* XI. §. 33.). Rectæ autem AB, AC, AD, AE cadunt ab eodem puncto A perpendicularis Az in peripheriam circuli BE. Ergo sunt omnes inter se æquales. Omnia itaque latera &c. quod erat ostendendum. Fig. 19. Tab. 11.

COROLLARIUM.

47. *Curva coni recti superficies consurgit ex infinitis triangulis isoscelibus, inter se mutuo æquilateris adeoque æqualibus, basim infinitæ parvam habentibus, simulque penes latera unitis.* Conus enim quicumque est pyramis infinitis triangulis comprehensa, quorum latera a lateribus ipsius coni non sunt diversa.

THEOREMA VII.

Superficies coni recti, seclusa basi, adæquat sectorem circuli, cujus arcus sit æqualis peripheriæ basis, radius vero lateri ipsius coni.

48. Esto conus rectus BAE, atque sector circuli *bac*, cujus arcus *bc* sit æqualis peripheriæ baseos BE ipsius coni, radius vero *ab* ejusdem lateri AB. Dico, superficiem coni BAE, seclusa basi BE, æquare sectorem *bac*.

Demonstratio.

Triangulum BAC sit unum ex illis infinitis isoscelibus, atque inter se æqualibus triangulis, quibus componitur curva coni BAE superficies (§. 47.). Fig. 20. Sumta autem in arcu *bc* sectoris *bac* particula infinite parva *be*, quæ sit Fig. 11. æqualis basi BC trianguli BAC, ductoque radio *ae*, cum omnes circuli radii sint inter se æquales (*Lib.* VII. §. 10.), sitque radius *ab* æqualis lateri Tab. 11. AB coni, triangulum *bae* æquilaterum erit triangulo BAC; ac proinde duo ipsa triangula erunt inter se æqualia (*Lib.* V. §. 84.). Igitur, cum arcus *bc* positus sit æqualis peripheriæ baseos BE coni BAE, in tot triangula isoscelia triangulo *bae* æqualia resolvi poterit sector *bac*, in quot triangula itidem isoscelia, trianguloque BAC æqualia resolvitur curva superficies coni BAE; eritque propterea curva ipsa coni superficies ad sectorem *bac*, ut est triangulum BAC ad triangulum *bae* (*Lib.* I. §. 127.). Triangulum autem BAC est æquale triangulo *bae*. Ergo ipsa quoque curva coni BAE superficies sectorem *bac* æquabit (§. 45.). Itaque curva coni recti &c. quod erat ostendendum.

SCHOLION.

49. Id quoque perspicuum fiet, si charta ita aptetur curvæ superficiei coni BAE, ut illi plane congruat, tum charta ipsa in planum extendatur. Hæc enim sectorem circuli exhibebit sectori *bac* omnino æqualem.

Co-

Corollarium I.

Curva coni recti superficies adaequat triangulum rectangulum, cujus altitudo sit aequalis lateri ipsius coni, basis vero peripheriae baseos ejusdem.

50. Superficies nimirum coni recti BAE, seclusa basi, BE, aequalis erit triangulo rectangulo *mdn*, cujus altitudo *md* sit aequalis lateris AB, Fig. 20. & basis *mn* peripheriae circuli baseos BE ipsius coni. Triangulum quippe Fig. 21. Tab. 11. *mdn* est aequalis sectori *bac* (*Lib.* X. §. 54.), quem conica ipsa superficies adaequat (§. 48.).

Corollarium II.

Curva coni recti superficies adaequat rectangulum contentum sub dimidio latere coni, & sub recta, quae baseos peripheriae sit aequalis.

51. Bifariam nempe diviso latere *dm*, quod posuimus aequale lateri AB Fig. 20. coni recti BAE, constitutoque sub segmento *em*, & sub recta *mn*, quae Fig. 22. Tab. 11. aequalis posita est peripheriae baseos BE, rectangulo *en*, curva coni BAE superficies rectangulum ipsum *en* aequabit. Rectangulum quippe *en* adaequat triangulum *mdn* (*Lib.* IX. §. 102.), cui curva ipsius coni superficies est aequalis (§. 50.).

Corollarium III.

Curva coni recti superficies est ad circulum basis, ut ipsius coni latus ad ejusdem radium.

52. Videlicet curva superficies coni recti BAE est ad circulum basis BE, ut latus AB ad radium basis BE. Ducta namque recta *mn* aequali peripheriae baseos BE, erectaque perpendiculari *dm* aequali lateri AB, & sumto in illa segmento *xm*, quod sit aequale radio *Bz*, curva coni superficies BAE aequabit triangulum rectangulum *dmn* (§. 50.), & circulus basis Fig. 20. Fig. 22. Tab. 11. BE triangulum rectangulum *xmn* (*Lib.* X. §. 43.), eritque propterea superficies coni ad circulum basis, ut triangulum *dmn* ad triangulum *xmn*. Triangulum autem *dmn* est ad triangulum *xmn*, ut est altitudo *dm* ad altitudinem *xm* (*Lib.* IX. §. 101.), sive ut latus AB ad radium *Bz* basis BE. Ergo curva quoque coni BAE superficies erit ad circulum basis BE, ut est latus *AB* ad radium *Bz* (*Lib.* I. §. 77.).

Co-

COROLLARIUM IV.

Superficies curvæ conorum rectorum æquales bases habentium sunt directe inter se, ut ipsorum latera.

53. Enimvero, cum curva recti coni superficies sit æqualis triangulo rectangulo, cujus altitudo adæquat latus, & basis peripheriam baseos ipsius coni (§. 50.), superficies curvæ conorum rectorum æquales bases habentium erunt inter se, ut triangula rectangula basium æqualium. Hæc autem sunt, ut altitudines (*Lib. IX.* §. 101.). Ergo ipsæ quoque conorum superficies erunt, ut ipsorum latera.

COROLLARIUM V.

Superficies curvæ conorum rectorum habentium latera æqualia sunt, ut peripheriæ baseos.

54. Sunt enim, ut triangula rectangula, quorum altitudines sint æquales.

COROLLARIUM VI.

Superficies curvæ conorum rectorum latera æqualia habentium sunt directe inter se, ut suarum basium radii, & diametri.

55. Quandoquidem circulorum tam radii, quam diametri sunt *respective* inter se, ut ipsorum circulorum peripheriæ (*Lib. IX.* §. 154, 155.).

PROBLEMA VI.

Curvam coni recti superficiem invenire.

56. Esto conus rectus BAE, cujus curvam superficiem determinare oporteat.

Resolutio.

Invento valore peripheriæ baseos BE (*Lib.* X. §. 40.), per ipsum multiplicetur valor dimidii lateris AB. Factum dabit valorem superficiei conicæ BAE, demta basi BE. Ut si peripheria basis BE fuerit $= a$, & valor dimidii lateris AB fuerit $= b$, curva coni BAE superficies erit $= ab$.

Demonstratio.

Factum quippe ab exprimit valorem rectanguli, cui conica ipsa superficies est æqualis (§. 51.).

THEO-

THEOREMA VIII.

Curva coni recti superficies adaquat circulum, cujus radius sit media proportionalis inter latus ipsius coni, & radium basis.

57. Recta EF sit media proportionalis inter latus AB coni recti BAC, & radium BD basis BC ejusdem, atque ex recta EF, veluti radio, describatur circulus EG. Dico, curvam coni BAC superficiem æquare circulum EG.

Demonstratio.

Cum enim circulus EG sit ad circulum basis BC in ratione *duplicata* radii EF ad radium BD (*Lib.* IX §. 185.); sitque itidem latus AB ad radium BD in ratione *duplicata* ejusdem radii EF ad radium BD (*Lib.* I.
Fig. 1. §. 177.), ex eo nimirum quod tres rectæ AB, EF, BD positæ sint con-
Fig. 2. tinuo inter se proportionales, erit circulus GE ad circulum basis BC, ut
Tab. 12. latus AB ad radium BD (§. 78.). Curva autem coni BAC superficies est ad circulum basis BC, ut latus AB ad radium BD (§. 52.). Ergo curva ipsa coni BAC superficies erit ad circulum basis BC, ut ad eundem circulum BC se habet circulus EG (*Lib.* I. §. 78.); ac proinde conica ipsa eadem superficies circulum EG æquabit (§. 103.). Itaque curva coni &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA IX.

Curvæ conorum rectorum superficies sunt directe inter se, ut rectangula sub eorum lateribus, & basium radiis comprehensa.

58. Sint duo coni recti recti BAC, *bac*. Dico, curvam superficiem co-
Fig. 1. ni BAC esse ad curvam superficiem coni *bac*, ut rectangulum KHBA con-
Fig. 3. tentum sub latere AB, & sub recta BH æquali radio BD basis BC ad
Tab. 12 rectangulum *khba*, quod sub latere *ab*, & sub recta *bh*, quæ radio *bd* basis *bc* sit æqualis, continetur.

Demonstratio.

Radius EF circuli EG sit media proportionalis inter latus AB coni
Fig. 2. BAC, & radium BD basis, sicuti etiam radius *ef* circuli *eg* inter latus *ab*
Fig. 4. coni *bac*, & radium *bd* basis ejusdem. Erit ergo curva coni BAC super-
Tab. 12. ficies æqualis circulo EG, & curva coni *bac* superficies circulo *eg* (§. 57.). ac proinde curva superficies coni BAC erit ad curvam superficiem coni *bac*, ut est circulus EG ad circulum *eg*; adeoque ut quadratum itidem MF radii EF ad quadratum *mf* radii *ef*; cum hujusmodi quadrata eam

inter

inter se rationem habeant, quam ipsi circuli (*Lib.* IX. §. 188.). Rectangulum autem KHBA est æquale quadrato MF, & rectangulum *khba* quadrato *mf* (§. 111.); ut propterea ratio rectanguli KHBA ad rectangulum *khba* non sit diversa a ratione quadrati MF ad quadratum *mf*. Ergo curva quoque superficies coni BAC erit ad curvam superficiem coni *bac*, ut est rectangulum KHBA ad rectangulum *khba*. Itaque curvæ conorum rectorum &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Curvæ superficies conorum rectorum, æquales bases habentium sunt directe inter se, ut eorum latera.

59. Ut si basium circuli BC, *bc* fuerint æquales, superficies coni BAC erit ad superficiem coni *bac*, ut latus AB ad latus *ab*. Cum enim circuli basium nequeant esse æquales, quin eorum itidem radii BD, *bd* sint æquales (§ 50.), rectangula KB, *kb* erunt hoc ipso, ut latera AB, *ab* (§. 100.). Ergo in eadem quoque ratione erunt ipsorum conorum superficies.

COROLLARIUM II.

Curvæ superficies conorum rectorum, quorum latera sint æqualia; sunt directe inter se, ut basium radii.

60. Hanc enim proportionem habent rectangula, quibus superficies ipsæ proportionaliter respondent (§. 95.).

THEOREMA X.

Curva superficies coni recti est ad curvam superficiem cylindri itidem recti, ut rectangulum contentum sub latere coni, & sub radio baseos ad rectangulum per axim ipsius cylindri.

61. Esto conus rectus *bac*, & cylindrus rectus AC. Dico conicam superficiem *bac* esse ad superficiem cylindricam ABCD, basibus seclusis, ut rectangulum *khba*, quod sub latere *ab*, & sub radio *bd* baseos continetur, ad rectangulum per axim ABCD. Fig. 3. Fig. 5. Tab. 12.

Demonstratio.

Facta hypothesi, ut radius *ef* circuli *eg* sit media proportionalis inter latus *ab* coni, & radium *bd* basis ejusdem, quemadmodum etiam radius EF circuli EG inter latus AB cylindri, & baseos diametrum BC, conica Fig. 4. Fig. 6. Tab. 12.

superficies

superficies *bac* æquabit circulum *eg* (§.57.), & superficies cylindrica ABCD circulum EG (§.41.) quamobrem conica superficies *bac* erit ad superficiem cylindricam ABCD, basibus seclusis, ut est circulus *eg* ad circulum EG; adeoque etiam ut quadratum *en* ad quadratum EN (*Lib.* IX. §. 188.). Quadratum autem *en* adæquat rectangulum *kbba*, & quadratum EN rectangulum ABCD (§.111.); ut proinde ratio rectanguli *kbba* ad rectangulum ABCD diversa non sit a ratione quadrati *en* ad quadratum EN. Ergo conica superficies *bac* erit ad superficiem cylindricam ABCD, demtis basibus, ut rectangulum *kbba* ad rectangulum ABCD (*Lib.* I. §. 78.). Itaque curva coni recti &c. quod erat ostendendum.

L E M M A II.

In omni parallelogrammo complementa eorum parallelogrammorum, quæ circa diametrum existunt, sunt inter se æqualia.

62. Per punctum G diagonalis AC parallelogrammi ABCD ducatur recta EF parallela lateribus AB, DC, & recta HK parallela lateribus AD, BC, ut proinde totum ipsum parallelogrammum divisum sit in quatuor parallelogramma HE, GD, BG, FK. Dico, parallelogramma BG, GD, quæ dicuntur complementa duorum HE, FK circa diametrum AC existentium, esse inter se æqualia.

Fig. 7. Tab. 12.

Demonstratio.

Quoniam triangula ACD, ACB sunt æqualia, sicuti etiam triangula GCK, GCF (*Lib. VI.* §. 21.), si triangulo ACD dematur triangulum GCK, & triangulo ACB triangulum GCF, trapezium AGKD æquale erit trapezio AGFB (*Syn. Algeb.* § 266.). Triangulum porro AGE adæquat triangulum AGH (*Lib. VI.* § 21.). Ergo, his sublatis, parallelogrammum GD parallegrammum BG æquabit (*Syn. Algeb.* §. 266.). Itaque in omni parallelogrammo &c. quod erat ostendendendum.

L E M M A III.

In omni frusto coni recti rectangulum contentum sub diametro circuli intermedii, & sub latere ipsius frusti adæquat rectangula, quæ fiunt ex eodem latere in radios circulorum parallelorum frustum ipsum terminantium.

63. Esto conus rectus BAC, in quo ducto plano DE circulo basis BC parallelo, spectetur frustum BDEC. Recta autem FG sit diameter circuli circulis DE, BC paralleli, atque bifariam dividentis latera DB, EC ipsius frusti. Dico, rectangulum contentum sub recta FG, & sub latere DB frusti conici BDEC, æquale esse rectangulis simul sumtis, quæ fiunt ex eodem

Fig. 8. Tab 12.

dem

dem latere DB in radios DM, BH circulorum DE, BC frustum ipsum terminantium.

Demonstratio.

Cum tres circuli DE, FG, BC positi sunt paralleli, eorum diametri DE, FG, BC in eodem plano BAC existentes erunt inter se parallelæ (*Lib. VIII. §. 26.*). Quamobrem erit DE . FG = AD . AF, & FG . BC = AF . AB (*Lib. IX. §. 59.*). Tres autem rectæ AD, AF, AB sunt inter se arithmetice proportionales (*Lib. I. §. 193.*); cum earum excessus DF, FB positi sint æquales. Ergo tres quoque DE, FG, BC arithmetice inter se proportionales erunt; ac proinde summa extremarum DE, BC dupla erit mediæ FG (*§. 196.*) Est autem ipsa eadem summa duarum DE, BC dupla summæ radiorum DM, BH. Ergo summa radiorum DM, BH æquabit mediam FG. Quapropter rectangulum contentum sub recta FG, & sub latere DB æquale erit rectangulis simul sumtis, quæ sub eodem latere DB, & sub radiis DM, BH continentur (*Syn. Alg. §. 256.*). In omni igitur frusto coni recti &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XI.

Superficies frusti coni recti est ad superficiem integri coni, ut rectangulum contentum sub latere frusti, & sub diametro circuli frustum ipsum in medio dividentis, ad rectangulum, quod sub latere totius coni, & sub basis radio continetur.

64. Sit BDEC frustum coni recti BAC, quod per medium dividatur a circulo, cujus diameter sit recta FG. Constituatur autem sub recta BR, quæ rectam adæquet FG, & sub latere DB ipsius frusti rectangulum RD, sub recta vero BN æquali radio BH baseos BC, & sub latere AB coni rectangulum BT. Dico, curvam superficiem frusti conici BDEC esse ad superficiem curvam integri coni BAC, ut est rectangulum RD ad rectangulum BT.

Demonstratio.

Ducta in parallelogrammo BT diagonali AN, & per punctum P, in quo diagonalis ipsa a latere DX parallelogrammi RD secatur, recta SV lateribus TN, AB parallelogrammi BT parallela, cum tam recta DM sit ad rectam BH, quam recta PD ad rectam NB, ut segmentum AD ad latus AB (*Lib. IX. § 59.*), erit DM . BH = DP . BN (*Lib. I §. 76*). Est autem per hypothesim BN = BH. Ergo erit quoque PD = DM (*§. 128.*); atque adeo parallelogrammum rectangulum DS comprehensum erit sub latere AD coni recti DAE, & sub radio DM basis ejus. Igitur curva superficies coni BAC erit ad curvam superficiem coni DAE, ut rectangulum BT ad rectangulum DS (*§. 63.*), & *dividendo per conversionem rationis* superficies Fig. 8 Tab. 12

 frusti

frusti conici BDEC erit ad superficiem totius coni BAC, ut rectangulum BNQD simul cum rectangulo QPST ad rectangulum DS (*Lib. I. §. 141.*). Rectangulum autem QPST adæquat rectangulum PVBD (*§. 62.*); & rectangulum PVBD illud est, quod sub latere DB, & sub radio DM circuli DE continetur. Ergo superficies frusti conici BDEC erit ad curvam superficiem integri coni BAC, ut rectangulum BNQD una cum rectangulo BVPD ad rectangulum BT. Duo porro rectangula BNQD, BVPD facta ex latere DB in radios BH, DM circulorum BC, DE simul sumta adæquant rectangulum BRXD, quod sub diametro FG circuli intermedii, & sub eodem frustri latere DB continetur (*§. 63.*). Ergo curva frusti conici BDEC superficies est ad superficiem integri coni BAC, ut rectangulum BX ad rectangulum BT (*Lib. I. §. 102.*); adeoque superficies &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XII.

Superficies frusti coni recti adæquat circulum, cujus radius sit media proportionalis inter diametrum circuli intermedii, latus ipsius frusti.

Fig 8. Fig. 9. Fig. 12. 65. Diameter circuli intermedii in frusto BDEC coni recti BAC sit recta FG. Inter ipsam autem FG, & latus DB ipsius frusti media proportionalis sit radius *ab* circuli *ac*. Dico, curvam superficiem frusti conici BDEC æquare circulum *ac*.

Demonstratio.

Fig. 10. Tab. 12. Radius *de* circuli *df* sit media proportionalis inter latus AD segmenti conici DAE, & radium DM basis ejus; sitque propterea curva superficies coni DAE circulo *df* æqualis (*§. 57.*). Quoniam igitur radius *ab* est media proportionalis inter rectam FG, & latus DB, rectangulum RD sub his rectis contentum æquale erit quadrato *mb* (*Lib. IX. §. 111.*); eandemque ob causam rectangulum quoque DS sub latere AD, & sub recta DP radio DM æquali comprehensum æquabit quadratum *ne* radii *de*. Superficies autem frusti conici BDEC est ad superficiem coni DAE, ut rectangulum RD ad rectangulum DS (*§. 63.*). Ergo superficies frusti conici BDEC erit quoque ad superficiem coni DAE, ut quadratum *mb* ad quadratum *ne*. Circulus porro *ac* est ad circulum *df*, ut quadratum *mb* ad quadratum *ne* (*§. 188.*). Ergo superficies frusti conici BDEC erit ad superficiem coni DAE, ut circulus *ac* ad circulum *df* (*Lib. I. §. 76.*), & *alternando* superficies frusti conici BDEC erit ad circulum *ac*, ut superficies coni DAE ad circulum *df* (*§. 125.*). Posuimus autem, superficiem coni DAE æquare circulum *df*. Ergo circulo quoque *ac* æqualis erit curva frusti conici superficies BDEC (*§. 45.*). Itaque superficies &c. quod erat ostendendum.

THEO-

THEOREMA XIII.

Superficies frusti coni recti est ad cujusvis recti cylindri superficiem, ut rectangulum contentum sub diametro circuli intermedii, & sub latere ipsius frusti ad rectangulum per axim cylindri.

66. Frustum coni recti sit BDEC. Dico, illius superficiem esse ad superficiem cylindri recti AC, ut rectangulum RD contentum sub latere D3, & sub recta BR, quæ sit æqualis diametro FG circuli intermedii, ad rectangulum ABCD per axim ipsius cylindri. Fig. 8. Fig. 5. Tab. 12.

Demonstratio.

Radius *ab* circuli *ac* sit media proportionalis inter latera RB, DB rectanguli RD, & radius EF circuli EG sit media proportionalis inter latus AB, & latus BC rectanguli AC; sitque propterea superficies frusti conici BDEC æqualis circulo *ac* (§. 65.), & superficies cylindri AC æqualis circulo EG (§. 41.). Ut ergo circulus *ac* ad circulum EG, ita erit superficies frusti conici BDEC ad superficiem cylindri AC. Circulus autem *ac* est ad circulum EG, ut quadratum *mb* ad quadratum MF (*Lib. IX.* §. 188.). Ergo superficies quoque frusti conici BDEC erit ad superficiem cylindri AC, ut quadratum *mb* ad quadratum MF (*Lib. I.* §. 77.). Ut autem quadratum *mb* ad quadratum MF, ita rectangulum RD ad rectangulum ABCD; cum rectangulum RD sit æquale quadrato *mb*, & rectangulum ABCD quadrato MF (*Lib. IX.* §. 111.). Ergo superficies frusti conici BDEC erit itidem ad superficiem cylindricam AC, ut rectangulum RD ad rectangulum ABCD (*Lib. I.* §. 77.). Superficies itaque &c. quod erat ostendendum. Fig. 9. Fig. 6. Tab. 1.

LEMMA IV.

Omnes conicæ superficies, quæ gignuntur a lateribus segmentum perimetri polygoni regularis constituentibus, atque circa perpendicularem ejusdem radium revolutis, adæquant simul sumtæ curvam superficiem cylindri recti producti a rectangulo, cujus altitudo, circa quam rotatur, eadem sit cum altitudine ipsius segmenti, basis vero sit ejusdem polygoni catetus.

67. Esto ABCD segmentum perimetri polygoni regularis, quod concipiatur revolvi circa ejusdem radium AE chordæ DL perpendiculariter insistentem. Sub eadem autem altitudine AE rotantis segmenti ABCD, & super rectam FK, quæ sit æqualis cateto ipsius polygoni, constituatur rectangulum HKEA, quod circa eandem altitudinem AE itidem revolvatur, integramque revolutionem compleat. Dico, omnes cônicas superficies, quæ in illa revolutione producuntur a lateribus AB, BC, CD, æqua- Fig. 11. Tab. 12.

re ſimul ſumtas curvam ſuperficiem cylindri recti, qui a rotante rectangulo HKEA ſimul efficitur.

Demonſtratio.

Per puncta B, C ducantur rectæ *Gc*, *Fn* parallelæ lateribus HA, KE rectanguli HE, atque adeo ad rectos angulos lateri AE inſiſtentibus. Tum a centro E ad punctum B ducta recta EB, cum rectæ EA, EB ſint radii polygoni regularis, erunt inter ſe æquales (*Lib. IX.* §. 19.), ac proinde triangulum BEA erit iſoſceles (*Lib. V.* §. 25.). Quamobrem, ſi ab eodem centro E in latus BA cadat catetus, ſive recta perpendicularis E*a*, hæc latus ipſum biſariam dividet (§. 78.). Rurſus quoniam triangulum E*a*A eſt rectangulum, demiſſa perpendiculari *ab*, triangulum E*ab* ſimile erit triangulo A*ab* (*Lib. IX.* §. 73.). Triangulum autem AB*c* ſimile eſt triangulo A*ab* (§. 65.), ex eo nimirum quod recta *ab* ſit baſi B*c* parallela (*Lib. IV.* §. 10.). Ergo triangulum E*ab* ſimile quoque erit triangulo AB*c* (*Lib. IX.* §. 35.); habebuntque idcirco hujuſmodi triangula E*ab*, AB*c* latera circa æquales angulos E*ab*, BA*c* proportionalia, videlicet erit E*a*. *ab* = BA. A*c* (§. 1.). Poſitis autem quatuor rectis lineis proportionalibus, rectangulum extremarum adæquat rectangulum mediarum (§. 107.). Igitur, cum recta G*c* adæquet catetum E*a* (*Syn. Alg.* §. 259.), ex eo quod ſit G*c* = KE (*Lib. IV.* §. 20.), & per hypotheſim KE = E*a*, rectangulum H*c* contentum ſub extremis E*a*, A*e* æquabit rectangulum *af* contentum ſub mediis *ab*. BA. Rectangulum porro B*b* contentum ſub recta B*c*, & ſub eadem BA duplum eſt rectanguli *af* (*Lib. IX* §. 95.); cum ſit B*c*. *ab* = AB. A*a* (§. 59.); adeoque B*c* = 2*a*A, quemadmodum per hypotheſim eſt BA = 2*a*A. Rectangulum quoque HN duplum eſt rectanguli H*c* (§ 95.), utpote ſuper duplam baſim, & ſub eadem altitudine conſtitutum. Ergo rectangula B*b*, HN erunt inter ſe æqualia (*Lib. I.* §. 103.). Manifeſtum porro eſt, rectangulum HN eſſe rectangulum per axim cylindri recti producti a rotante rectangulo HG*c*A; rectangulum vero B*b* comprehendi ſub latere AB, & ſub radio B*c* baſeos coni recti producti a rotante triangulo BA*c*. Ergo conica ſuperficies genita a latere AB erit ad cylindricam ſuperficiem productam a latere HG, ut eſt rectangulum B*b* ad rectangulum HN (§. 61.). Hujuſmodi autem rectangula oſtenſa ſunt æqualia. Igitur ipſæ quoque ſuperficies erunt inter ſe æquales (§. 45.).

Rurſus ducto ex centro E in latus BC cateto E*d*, qui latus ipſum biſariam dividet, ut de cateto E*a*, & de latere BA ſupra demonſtravimus; tum ex puncto medio *d* educta recta *dm* parallela utrique rectæ B*c*, C*n*, adeoque ad perpendiculum inſiſtente radio AE (*Lib. III.* §. 24.), nec non demiſſa ex puncto B in rectam C*n* recta B*e*, quæ ſit perpendicularis rectæ C*n*, ac proinde etiam rectæ G*c* (*Lib. IV.* §. 16.), ſimulque parallela rectæ *en* ob rectitudinem angulorum internorum *e*B*c*, *nc*B (§. 9.), quoniam anguli GB*e*, E*d*B æquales ſunt inter ſe (*Lib.* III. §. 37.), utpote recti (§. 23), ſicuti etiam anguli alterni GB*d*, B*dm* (*Lib.* IV. §. 15.), his ſublatis, erit reliquus CB*e* reliquo *md*E æqualis (*Syn. Alg.* §. 266.). Æquales ſunt autem etiam duo

B.G

BeC, dmE (*Lib.* III. §. 37.), quod uterque fit rectus (§. 23.). Ergo reliquus itidem BCe trianguli BeC reliquo dEm trianguli dmE æqualis erit (*Lib.* V. §. 46.); ac proinde duo hujusmodi triangula erunt æquiangula; adeoque sibi mutuo similia (*Lib. IX.* §. 66.), habebuntque latera circa æquales angulos CBe, Edm proportionalia (§. 1.), erit nempe Ed. dm = CB. Be, sive Ed. dm = CB. cn (*Lib. I.* §. 112.), cum sit Be = cn (*Lib. VI.* §. 20.). Rectangulum igitur GFnc extremarum Ed, cn æquabit rectangulum dy mediarum dm, BC (*Lib. IX.* §. 107.); atque adeo etiam rectangulum GM duplum rectanguli Gn æquale erit rectangulo dx duplo rectanguli dy (*Lib. I.* §. 103.). Jam autem patet, rectangulum GM esse rectangulum per axim cylindri recti producti a rotante rectangulo Gn, & rectangulum dx contineri sub latere BC frusti conici geniti a rotante trapezio cBCn, & sub diametro dz circuli frustum ipsum conicum per medium dividentis. Ergo curva superficies frusti conici producta a latere BC erit ad superficiem cylindri genitam a latere GF, ut est rectangulum dx ad rectangulum GM (§. 66.). Ista autem rectangula sunt inter se æqualia. Igitur illæ quoque superficies erunt inter se æquales (*Lib. I.* §. 45.). Eodem modo ostendam, superficiem frusti conici, quæ gignitur a latere CD æquare superficiem cylindricam, quæ a latere FK producitur. Ergo omnes conicæ superficies, quæ fiunt a lateribus AB, BC, CD, adæquant simul sumtæ cylindricam superficiem genitam a latere HK; ac proinde omnes superficies conicæ &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XIV.

Curva hemisphærii superficies adæquat curvam superficiem cylindri recti sibi circumscripti.

68. Hemisphærio BAE circumscriptus sit rectus cylindrus BCFE. Dico, curvam hemisphærii BAE superficiem æquare curvam superficiem cylindri BCFE.

Demonstratio.

Cum enim circulus sit polygonum regulare infinitorum laterum (*Lib.* IX. §. 149.), arcus BMA quadrantis circuli BMAD spectari potest, veluti segmentum perimetri polygoni regularis; ac proinde veluti constans ex Fig. 7. infinitis lateribus, sive rectis lineis infinitæ parvæ magnitudinis. Curva au- Tab. 11. tem hemisphærii BAE superficies oritur ab arcu BMA quadrantis BMAD rotantis circa immotum radium AD (*Lib. XI.* §. 60.). Ergo curva hemisphærii BAE superficies composita erit ex infinitis superficiebus conicis genitis in illa revolutione ab illis lateribus infinite parvis, quæ arcum BMA constituunt. Omnes autem hujusmodi conicæ superficies adæquant simul sumtæ curvam superficiem circumscripti cylindri BCFE (§. 67.), utpote genitam a latere CB rectanguli ACBD, cujus altitudo AD, circa quam

rotatur, eadem est cum altitudine quadrantis genitoris BMAD, basis vero BD est catetus polygoni, cujus perimetri una portio est arcus BMA. Ergo curva superficies hemisphærii BAE adæquat curvam superficiem cylindri circumscripti CBEF; adeoque curva &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Curva hemisphærii superficies est æqualis rectangulo sub illius radio, & sub peripheria circuli baseos comprehenso.

69. Videlicet curva superficies hemisphærii BAE est æqualis rectangulo contento sub radio DA, & sub peripheria circuli baseos BGE. Etenim Fig. 2. Tab. 11. radius AD adæquat latus CB cylindri BCEF ipsi hemisphærio circumscripti (§. 13.), idemque circulus BE est basis utriusque (§. 11.). Superficies autem cylindri BCFE, basibus seclusis, est æqualis rectangulo contento sub latere CB, & sub peripheria baseos BGE (§. 26.). Ergo, cum superficies curva hemisphærii BAE curvam cylindri BCFE superficiem adæquet (§. 68.), eadem ipsa superficies rectangulum sub radio AD, & sub peripheria baseos BGE comprehensum æquabit (*Synop. Alg.* §. 262.).

COROLLARIUM II.

Curva superficies hemisphærii adæquat circulum, cujus radius sit media proportionalis inter diametrum, & radium ipsius hemisphærii.

70. Ut si inter diametrum BE, & radium BD hemisphærii BAE inveniatur media proportionalis, hæc erit radius circuli, cui curva ipsius Fig. 2. Tab. 11. hemisphærii superficies æqualis erit. Hunc enim circulum adæquat curva superficies circumscripti cylindri BCFE (§. 40.); cum latus hujus cylindri ab hemisphærii radio, & diameter basis ejusdem a diametro inscripti hemisphærii non differant (§. 13., 12.).

COROLLARIUM III.

Superficies sphæræ adæquat curvam superficiem cylindri sibi circumscripti.

71. Superficies nimirum sphæræ ABHE adæquat curvam superficiem circumscripti cylindri CGKF. Ut enim superficies totius sphæræ ABHE est dupla curvæ superficiei hemisphærii BAE, ita curva superficies cylindri CGKF toti sphæræ circumscripti est dupla curvæ superficiei cylindri Fig. 12. Tab. 12. BCFE circumscripti hemisphærio BAE. Curva autem superficies hemisphærii BAE adæquat curvam superficiem cylindri BCFE sibi circumscripti (§. 68.). Ergo superficies quoque totius sphæræ ABHE curvam superficiem æquabit cylindri sibi circumscripti CGKF (*Lib. I.* §. 127.).

Co-

Corollarium IV.

Superficies sphæra est æqualis rectangulo contento sub illius diametro, & sub peripheria maximi in ea circuli.

72. Videlicet superficies sphæræ ABHE adæquat rectangulum contentum sub diametro AH, & sub peripheria circuli maximi BE. Cum enim circulus maximus BE adæquet circulum baseos GK cylindri ipsi sphæræ circumscripti (§. 11.), & diameter AH ejusdem cylindri latus CG, rectangulo contento sub diametro AH, & sub peripheria circuli BE curva circumscripti cylindri CGKF æqualis erit (§. 26.). Huic autem cylindricæ superficiei est æqualis superficies inscriptæ sphæræ ABHE (§. 71.). Ergo superficies sphæræ ABHE ipsum quoque rectangulum æquabit (*Syn. Algeb.* §. 262.). Fig. 12. Tab. 12.

Corollarium V.

Superficies sphæra adæquat circulum, cujus radius sit diameter ipsius sphæræ.

73. Ut si ex diametro AH sphæræ ABHE, veluti radio, circulus describatur, superficies sphæræ ABHE erit ejusmodi circulo æqualis. Hunc enim circulum adæquat curva superficies circumscripti cylindri CGKF (§. 34.), cui ipsa sphæræ superficies est æqualis (§. 71.). Ergo sphæræ quoque ABHE superficies circulum ipsum æquabit. Fig. 12. Tab. 12.

Scholion.

74. Ex eo, quod superficies sphæræ adæquet circulum ex illius diametro, veluti radio, descriptum, manifestum efficitur, quod alibi aliter demonstravimus, *sphærarum* nempe *superficies esse inter se in ratione duplicata suarum diametrorum*; cum hanc rationem habeant inter se circuli, qui ex earum sphærarum diametris describuntur, quosque sphæricæ ipsæ superficies adæquant.

Corollarium VI.

Superficies sphæra est quadrupla circuli in ea maximi.

75. Nimirum superficies sphæræ ABHE est quadrupla circuli in ea maximi BE. Cum enim illius circuli quadrupla sit curva superficies circumscripti cylindri CGKF (§. 32.) quam inscriptæ sphæræ ABHE superficies adæquat (§. 71.), ejusdem quoque circuli quadruplam esse ipsius sphæræ superficiem, consectarium est (*Lib. I.* §. 102.). Fig. 12. Tab. 12.

SCHOLION.

76. Id porro ex eo etiam patet, quod circuli in ſphæra maximi quadruplus ſit circulus ex ſphæræ diametro, veluti radio, deſcriptus (*Lib. IX.* §. 185.); cum hoc ipſo hujus radius ſit duplo major radio ipſius circuli maximi. Circulum autem deſcriptum ex ſphæræ diametro adæquat ejuſdem ſphæræ ſuperficies (§. 73.). Ergo ſphæræ quoque ſuperficies quadrupla erit circuli in ea maximi (*Lib. I.* §. 102.).

PROBLEMA VII.

Curvam ſuperficiem hemiſphærii determinare.

77. Determinare oporteat valorem curvæ ſuperficiei hemiſphærii BAE.

Reſolutio.

Fig. 2. Tab. 11. Invento valore peripheriæ circuli maximi BGE (*Lib.* X. §. 40.), valor hujuſmodi per valorem radii BD multiplicetur. Factum dabit valorem ſuperficiei quæſitum. Ut ſi peripheria maximi circuli EGE fuerit $= a$, & valor radii BD fuerit b, valor curvæ ſuperficiei hemiſphærii BAE erit $= ab$.

Demonſtratio.

Curva namque ſuperficies hemiſphærii BAE adæquat rectangulum, cujus valor a producto ab exprimitur (§. 69.).

PROBLEMA VIII.

Invenire ſuperficiem ſphæræ.

Invenire oporteat valorem ſuperficiei ſphæricæ ABHE.

Reſolutio I.

Fig. 12. Tab. 12. Determinato valore peripheriæ circuli BE in ipſa ſphæra maximi (*Lib.* X §. 40.), valor ipſe multiplicetur per diametrum ipſius ſphæræ. Quod enim hinc fit productum, erit valor ſphæricæ ſuperficiei ABHE. Si nimirum peripheria circuli maximi BE fuerit $= a$, & diameter AH $= b$, ſuperficies ſphæræ ABHE erit ab.

Demonſtratio.

Factum quippe ab exprimit valorem rectanguli, cui ſphærica ipſa ſuperficies eſt æqualis (§. 72.)

Reſo-

Resolutio II.

Inveniatur valor maximi circuli ipsius sphæræ (*Lib. X. §. 52.*); tum valor hujusmodi per 4. multiplicetur. Factum dabit valorem superficiei sphæricæ quæsitum. Valor nempe superficiei ABHE erit $= 4ab$, si valor circuli in ea maximi fuerit $= ab$.

Demonstratio.

Superficies siquidem sphæræ est quadrupla circuli in illa maximi (§. 75.).

THEOREMA XV.

Si eidem sphæræ circumscripti habeantur conus æquilaterus & cylindrus superficies coni sumta simul cum baseos circulo erit ad superficiem cylindri una cum basibus in ratione sesquialtera, sicuti etiam superficies cylindri una cum basibus, ad superficiem sphæræ.

Sphæræ MEN circumscripti habeantur conus æquilaterus BAC, & cylindrus FHKG.

I.

79. Dico primo superficiem coni BAC sumtam simul cum circulo baseos BC, esse in ratione *sesquialtera* ad superficiem cylindri FHKG una cum basibus FG, HK. Fig. 3. Tab. 11.

Demonstratio.

Quoniam conus est æquilaterus, illius sectio BAC per axim erit triangulum æquilaterum (*Lib. XI. §. 99.*); ac proinde recta, sive axis AE, utpote basi BC ad perpendiculum incumbens, angulum verticalem BAC bifariam dividet (*Lib. V. §. 80.*). Ducta igitur a centro D ad angulum B recta DB, cum radii DA, DB sint æquales (*Lib. VII. §. 10.*), anguli quoque DAB, DBA inter se æquales erunt (*Lib. V. §. 60.*). Duo autem anguli BAC, ABC æquales sunt inter se (§. 62.). Ergo etiam duo anguli DBE, EAC æquales erunt (*Lib. I. §. 126.*); cumque angulus EAC angulum EAB adæquet, ut modo vidimus, angulus quoque DBE angulum BAE æquabit. In triangulis itaque rectangulis AEB, BED duo anguli BAE, DBE sunt æquales. Communis autem utrique est angulus rectus AEB. Ergo reliquus angulus ABE unius reliquo angulo BDE alterius æqualis erit (*Lib. V. §. 46.*); duoque ipsa triangula erunt inter se mutuo æquiangula (§. 19); adeoque similia (*Lib. IX. §. 60.*), habebuntque latera circa æquales angulos

gulos proportionalia, erit nempe BE . ED = AE . EB (§. 1.); ac proinde quadratum quoque lateris BE erit ad quadratum lateris ED, ut est quadratum lateris AE ad quadratum lateris EB (*Lib.* I. §. 187.). Manifestum porro est, quadratum lateris AE triplum esse quadrati lateris BE; cum quadratum lateris AB dupli lateris BE per hypothesim sit quadruplum quadrati ipsius lateris BE (*Lib.* IX. §. 172.), & quadratum ejusdem lateris AB quadrata adæquet laterum AE, EB simul sumta (*Lib.* VI. §. 37.). Ergo quadratum quoque lateris BE triplum erit quadrati lateris DE. Porro circuli sunt inter se, ut quadrata suorum radiorum (*Lib.* IX. §. 188.). Ergo circulus descriptus ex latere EB, sive circulus baseos coni BAC, erit triplus circuli lateris DE, videlicet circuli in sphæra maximi MEN. Curva autem coni BAC superficies est ad circulum baseos, ut latus AB ad radium BE basis BC (§. 52.); adeoque in ratione dupla. Ergo curva coni BAC superficies erit ad maximum inscriptæ sphæræ circulum MEN, ut 6 ad 1; atque adeo ipsa eadem curva superficies coni, sumta simul cum ejusdem basi BC, erit ad circulum maximum inscriptæ sphæræ MEN, ut 9 ad 1. Constat autem, curvam superficiem cylindri FHKG esse ad circulum maximum MEN ejusdem sphæræ sibi inscriptæ, ut 4 ad 1 (§. 32.); adeoque superficiem ipsam curvam cylindri una cum ejus basibus esse ad maximum sphæræ circulum MEN, ut 6 ad 1; cum circulus basis adæquet circulum maximum sphæræ ipsi cylindro inscriptæ (§. 8.). Ergo curva superficies coni BAC una cum circulo baseos BC erit ad curva superficiem cylindri FHKG sumtam simul basibus HK, FG, ut 9 ad 6, in ratione nimirum *sesquialtera*.

II.

80. Dico 2, superficiem cylindri FHKG una cum basibus HK, FG esse in ratione quoque *sesquialtera* ad superficiem sphæræ sibi inscriptæ MEN.

Demonstratio.

Enimvero, quoniam curva superficies cylindri FHKG est quadrupla circuli suæ basis HK (§. 31.), superficies ipsa sumta simul cum basibus HK, FG erit ad seipsam, basibus seclusis, ut 6 ad 4. Superficies autem inscriptæ sphæræ MEN adæquat curvam superficiem cylindri FHKG (§. 71.). Ergo curva superficies ipsius cylindri una cum basibus erit quoque ad superficiem inscriptæ sibi sphæræ, ut 6 ad 4, nempe in ratione *sesquialtera*. Itaque si eidem sphæræ &c. quod erat ostendendum.

THEO-

THEOREMA XVI.

Curva superficies segmenti sphærici adæquat curvam superficiem cylindri recti geniti a rectangulo, cujus altitudo eadem sit cum altitudine segmenti sphærici, basis vero sit radius sphæræ, cujus ipsum segmentum est portio.

81. Sit ABC segmentum sphæricum genitum ex revolutione arcus AB Fig.13. circa radium BE. Dico, curvam illius superficiem ABC æquare curvam Tab.12. superficiem cylindri recti KHML producti a rectangulo KHDB, cujus altitudo BD eadem sit cum altitudine ipsius segmenti, basis vero HD sit æqualis radio BE sphæræ, cujus segmentum ipsum sphæricum ABC est una portio.

Demonstratio.

Eadem est cum demonstratione Theor. XIV. hujus: Curva enim superficies sphærici segmenti ABC consurgit ex infinitis conicis superficiebus productis ab infinitis illis lateribus, quæ arcum genitorem AB constituunt. Omnes autem hujusmodi conicæ superficies simul sumtæ adæquant curvam superficiem cylindri geniti a rectangulo KHDB. Ergo &c. Itaque curva superficies &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Curva superficies segmenti sphærici est æqualis rectangulo comprehenso sub recta, quæ sit æqualis peripheriæ maximi circuli sphæræ, cujus ipsum segmentum est portio, & sub ea parte radii, quæ est ipsius segmenti altitudo.

82. Curva nimirum superficies segmenti sphærici ABC adæquat rectangulum contentum sub recta, quæ sit æqualis peripheriæ maximi circuli Fig.13. sphæræ AFNG, & sub altitudine BD ipsius segmenti. Ejusmodi siquidem re- Tab.12. ctangulo æqualis est curva superficies cylindri geniti ex revolutione rectanguli KHDB circa idem axis segmentum BD (§. 28.); cum propter hypothesim hujusce cylindri basis sit circulus maximus ipsius sphæræ BFNG. Curva autem superficies segmenti sphærici ABC adæquat curvam superficiem cylindri geniti ex revolutione rectanguli KHDB (§. 81.). Ergo hæc ipsa quoque segmenti sphærici superficies rectangulum illud æquabit (*Syn. Alg.* §. 261.).

PRO-

PROBLEMA IX.

Curvam superficiem segmenti sphærici invenire.

83. Determinare oporteat curvam superficiem segmenti sphærici ABC.

Resolutio.

Fig.13. Tab.12. Inveniatur valor peripheriæ maximi circuli sphæræ BFNG, cujus ipsum segmentum est una portio (*Lib. X. §. 40.*). Tum valor ille per valorem axis AD ipsius segmenti multiplicetur. Factum erit valor curvæ superficiei quæsitus. Ut si peripheria maximi circuli fuerit $= a$, & axis segmentum AD fuerit $= b$, curva superficies segmenti sphærici ABC erit $= ab$.

Demonstratio.

Quandoquidem factum ab est valor rectanguli, cui curva superficies segmenti sphærici ABC est æqualis (§. 82.).

THEOREMA XVII.

Curva segmenti sphærici superficies est æqualis circulo, cujus radius sit chorda arcus genitoris.

84. In sphæra BFGN spectetur segmentum ABC genitum ex revolutione arcus BA circa quiescentem diametrum BN. Dico, curvam superficiem segmenti ABC æquare circulum, cujus radius sit chorda BA ipsius arcus genitoris AB.

Demonstratio.

Sub eodem segmento BD axis, & sub recta HD, quæ sphæræ radio sit æqualis constituatur rectangulum KHDB, atque a puncto A ad extremum N diametri BN ducatur recta AN. Quoniam igitur angulus BAN, utpote in semicirculo consistens, est rectus (*Lib. VII. §. 75.*), triangulum BAN erit rectangulum (*Lib. V. §. 29.*), cumque per hypothesim recta AD sit lateri BN perpendicularis, chorda BA erit media proportionalis inter diametrum BN, ejusque segmentum BD (*Lib. XI. §. 74.*); ac proinde etiam inter diametrum HM baseos cylindri geniti ex revolutione rectanguli KD, & inter ejusdem latus KH; cum per hypothesim sit HD $=$ BE, adeoque 2HD $=$ 2BE, sive HM $=$ BN, & KH $=$ BD. Igitur curva superficies cylindri KHML æqualis erit circulo, cujus radius sit recta AB (§. 41.). Curva autem superficies segmenti sphærici ABC adæquat curvam superficiem cylindri KHML (§. 81.). Ergo curva superficies segmenti

ti sphærici ABC circulum quoque æquabit, cujus radius sit chorda AB (*Syn. Alg.* §. 261.). Itaque curva &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XVIII.

Segmenta sphæricæ superficiei parallelis circulis divisæ sunt directè inter se, ut segmenta axis.

85. Sphæra BFNG secetur circulis parallelis AC, FG. Dico, curvam superficiem genitam ex revolutione arcus AF esse ad curvam superficiem genitam ex revolutione arcus AB circa eundem axim BN, ut est segmentum RD axis ad ejusdem segmentum DB.

Demonstratio.

Quoniam circuli, qui sphæram dividunt, sunt paralleli, eorum quoque diametri in eodem plano existentes AC, FG erunt parallelæ (*Lib. VIII.* §. 26.); cumque sphæræ axis BN ipsis circulis ad perpendiculum incumbat, diametris quoque AC, FG erit perpendicularis (*Lib. VIII.* §. 2.). Itaque cum segmentum superficiei sphæricæ genitum ex revolutione arcus BA sit æquale circulo ex chorda AB, & segmentum sphæricæ superficiei genitum ex revolutione arcus FAB adæquet circulum ex chorda BF (§. 84.), segmentum superficiei sphæricæ genitum ex revolutione arcus FAB erit ad segmentum ejusdem superficiei genitum ex revolutione arcus AB, ut circulus ex chorda BF ad circulum ex chorda AB; ac proinde ut quadratum chordæ BF ad quadratum chordæ AB (*Lib. IX.* §. 188.). Quadratum autem chordæ BF adæquat rectangulum KQ contentum sub recta KL æquali diametro CN, & sub recta KP æquali segmento BR axis BN, & quadratum chordæ AB adæquat rectangulum KM, quod sub eadem recta KL, & sub recta KH æquali segmento BD ejusdem axis continetur (§. 111.); cum recta BF sit media proportionalis inter totam BN, & partem BR, sicuti etiam recta BA inter totam BN, & partem BD (§. 74.); quod anguli BFN, BAN triangulorum BFN, BAN sint recti (*Lib. VII.* §. 75.), & rectæ FR, AD ad perpendiculum axi BN insistant. Ergo segmentum superficiei sphæricæ genitum ex revolutione arcus BF erit quoque ad ejusdem superficiei segmentum genitum ex revolutione arcus BA, ut rectangulum KQ ad rectangulum KM (*Lib. I.* §. 76.); ac proinde *dividendo*, segmentum superficiei sphæricæ genitum ex revolutione arcus FA erit ad segmentum ejusdem superficiei genitum ex revolutione arcus AB, ut rectangulum HQ ad rectangulum KM (§. 135.). Rectangulum porro HQ est ad rectangulum KM, ut HP ad HK, sive ut DR ad DB (*Lib. IX* §. 100.). Ergo, ut DR ad DB, erit quoque segmentum sphæricæ superficiei genitum ex revolutione arcus AF ad ejusdem segmentum ex revolutione arcus AB (*Lib. I.* §. 98.). Itaque segmenta &c. quod erat ostendendum. Fig. 13. Tab. 12.

PRO-

PROBLEMA X.

Polyedri regularis superficiem dimetiri.

86. Dimetiri oporteat superficiem *octaedri*.

Resolutio.

Inveniatur valor unius ex illis octo triangulis æqualibus, quibus *octaedrum* clauditur (*Lib. X.* §. 25.), atque hujusmodi valor per 8, scilicet per numerum omnium planorum polyedrum ipsum terminantium multiplicetur. Factum erit superficies quæsita.

Demonstratio.

Superficies enim *octaedri* ex octo triangulis æqualibus simul sumtis consurgit.

PROBLEMA XI.

Superficiem polyedri irregularis determinare.

Resolutio.

87. Inveniatur area omnium planorum, quibus polyedrum terminatur (§. 28.); tum ex hisce omnibus valoribus fiat summa, quæ erit valor totius superficiei quæsitus.

Demonstratio.

Omnes enim partes cujusvis totius simul sumtæ ipsum totum adæquant

THEOREMA XIX.

Soliditas cujusvis prismatis adæquat factum ex multiplicatione baseos per altitudinem.

Fig. 14. Tab. 12. 88. Esto prisma AB, cujus altitudo sit recta EF. Dico, illius soliditatem æquare valorem producti, quod emergit multiplicando illius basim DCB per altitudinem EF.

Demonstratio.

Patet ex genesi ipsius prismatis (*Lib. XI.* §. 80.).

PROBLEMA XII.

Soliditatem prismatis cujuscumque invenire.

89. Determinare oporteat soliditatem prismatis AB.

Resolutio.

Valor basis DCB multiplicetur per altitudinem EF. Factum dabit valorem totius prismatis AB. Ut si basis DCB fuerit $= ab$, & altitudo EF $= d$, soliditas ipsius prismatis erit $= abd$.

Demonstratio.

Manifesta est ex §. 88.

SCHOLION I.

90. Pro determinanda soliditate cubi, satis est, ut inventó valore unius ex illis quadratis, quibus cubus ipse clauditur, valor ille per valorem lateris multiplicetur. Patet ex ipsa natura cubi.

SCHOLION II.

91. Quoniam cylindrus est species prismatis (*Lib. XI.* §. 70.), habebitur soliditas dati cylindri, si illius basis per altitudinem multiplicetur.

THEOREMA XX.

Omnis pyramis adæquat prisma ejusdem basis, & subtriplæ altitudinis.

92. Esto pyramis quæcunque *debc*, cujus basis sit planum *dcb*, & altitudo recta *ef*. Super eandem autem basim, & sub tertia parte *nf* altitudinis *ef* constitutum habeatur prisma *mdb*. Dico, pyramidem *debc* æquare prisma *mdb*. Fig. 15. Tab. 12.

Demonstratio.

Super basim DCB æqualem basi *dcb*, & sub altitudine EF altitudini *ef* æquali constitutum sit prisma AB. Quoniam igitur duo prismata AB, *mb* habent æquales bases DCB, *dcb*, prisma AB erit ad prisma *mb*, ut altitudo EF ad altitudinem *ef* (*Lib. XIII.* §. 46.), adeoque in ratione *tripla*. Est autem prisma AB in hac eadem quoque ratione ad pyramidem *debc* (§. 29.). Ergo pyramis *debc*, & prisma *mb* sunt duo solida æqualia (*Lib. I.* §. 113.). Omnis itaque pyramis &c. quod erat ostendendum. Fig. 14.

Co-

Corollarium I.

Omnis pyramis adæquat prisma subtriplæ basis, & ejusdem altitudinis

93. Ut si basis DCB prismatis AB fuerit *tertia pars* basis *dcb* pyramidis *debc*, altitudo vero EF altitudini *ef* æqualis, pyramis *debc* æquabit prisma AB. Hac enim facta hypothesi, prisma AB est æquale prismati *mb* (*Lib.* XIII. §. 59.), cui pyramis ipsa *debc* est æqualis; cum duo prismata AB, *mb* reciprocent hoc ipso sibi mutuo bases, & altitudines.

Corollarium II.

Omnis conus adæquat cylindrum ejusdem basis, & subtriplæ altitudinis, necnon cylindrum subtriplæ basis, & ejusdem altitudinis.

94. Omnis enim conus est pyramis infinitangula (*Lib.* XI. §. 72.), & omnis cylindrus est prisma infinitis parallelogrammis comprehensum (§. 70.).

Problema XIII.

Pyramidis soliditatem invenire.

95. Determinare oporteat soliditatem pyramidis *deb*.

Resolutio.

Inveniatur valor basis *dcb* (*Lib.* X. §. 28.), isque per tertiam partem altitudinis *ef* multiplicetur. Productum, quod hinc emergit, erit valor pyramidis *deb* quæsitus. Ut si basis *dcb* fuerit $= mn$, & tertia pars altitudinis *ef* fuerit $= p$, soliditas pyramidis *deb* erit $= mnp$.

Demonstratio.

Patet ex §. 93.

Scholion I.

96. Cum pyramis sit tertia pars prismatis ejusdem basis, & altitudinis (*Lib.* XIII. §. 29.), & prismatis soliditas sit factum ex ductu basis in altitudinem (*Lib.* XI. §. 115.), habebitur soliditas pyramidis, si multiplicata basi per altitudinem, factum per 3. dividatur. Soliditas nimirum pyramidis erit $= \frac{mnx}{3}$ si basis fuerit $= mn$, & altitudo $= x$.

SCHOLION II.

97. Quod modo diximus de dimensione pyramidis, intelligendum est etiam de dimensione coni. Habebitur nempe soliditas coni, si illius basis multiplicetur per tertiam partem altitudinis, vel factum ex ductu basis in totam altitudinem per 3. dividatur. Patet ex §§. 94, 95.

PROBLEMA XIV.

Invenire soliditatem polyedri irregularis.

98. Esto polyedrum irregulare ACE. Determinare oporteat illius soliditatem. Fig. 7. Tab. 9.

Resolutio.

Facta resolutione polyedri in pyramides (*Lib. XI. §. 115.*), singularum valor inquiratur (§. 95.). Tum fiat omnium summa, quæ erit valor ipsius poyedri quæsitus.

Demonstratio.

Omnes enim partes cujusvis totius simul sumtæ, adæquant ipsum totum (*Synop. Alg. §. 256.*).

THEOREMA XXI.

Polyedrum regulare adæquat prisma, cujus basis sit æqualis superficiei ipsius polyedri, altitudo vero tertiam cateti partem adæquet.

99. Esto polyedrum regulare ACE, cujus centrum sit Z, & catetus ZN. Fig. 7. Dico, polyedrum ACE æquare prisma, cujus basis sit æqualis superficiei Tab. 9. ipsius polyedri, altitudo vero sit tertia pars cateti ZN.

Demonstratio.

Cum polyedrum ACE resolvi possit in tot pyramides omnino inter se æquales, quot sunt plana ipsum terminantia (*Lib.* XIII. §. 94.), atque omnia hujusmodi plana sint inter se æqualia (*Lib.* XI. §. 10.); tam multiplex pyramidis MZAF erit ipsum polyedrum ACE, quam multiplex plani AMF est tota ipsius polyedri superficies (*Lib.I.* §. 20.), ac proinde polyedrum ACE erit ad pyramidem MZAF, ut est tota superficies ipsius polyedri ad planum AMF. Ut autem integra polyedri superficies ad planum AMF, ita est prisma, cujus basis sit æqualis superficiei ipsius polyedri, altitudo vero

tertiam partem cateti ZN adæquet, ad prisma, cujus basis sit planum AMF, & eadem altitudo (*Lib.* XIII. §. 40.). Ergo polyedrum ACE est ad pyramidem MZAF, ut prisma, cujus basis sit tota superficies ipsius polyedri, & altitudo sit tertia pars cateti ZN, ad prisma ejusdem altitudinis, cujus basis sit planum AMF (*Lib.* I. §. 78.). Constat autem, pyramidem MZAF æquare prisma, cujus basis sit planum AMF, & altitudo sit tertia pars cateti ZN (§. 92.); cum altitudo pyramidis MZAF ab ipso cateto ZN non differat (*Lib.* XIII. §. 24.). Ergo polyedrum quoque ACE æquabit prisma, cujus basis sit tota ipsius polyedri superficies, altitudo vero tertia pars cateti ZN (*Lib.* I. §. 128.). Itaque polyedrum &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Polyedrum regulare adæquat prisma, cujus basis sit tertia pars superficiei ipsius polyedri, altitudo vero ejusdem catetus.

100. Hujusmodi siquidem prisma est illi æquale, cujus basis est tota poyledri superficies, altitudo vero tertia pars cateti (*Lib. XIII.* §. 59.); cum scilicet duo ista prismata reciprocent hoc ipso sibi mutuo bases, & altitudines.

COROLLARIUM II.

Sphæra adæquat prisma, cujus basis sit æqualis superficiei ipsius sphæræ, altitudo vero sit tertia pars radii, vel cujus basis sit tertia pars superficiei, altitudo vero ejusdem sphæræ radius.

101. Sphæra namque est polyedrum regulare infinitis planis comprehensum (*Lib. XIII.* §. 117.); cujus catetus non differt ab ejusdem radio (§. 118).

PROBLEMA XV.

Soliditatem polyedri regularis dimetiri.

102. Dimetiri oporteat soliditatem polyedri regularis ACE, cujus catetus sit recta ZN.

Resolutio.

Inventa superficie (§. 86.), ipsius valor per catetum ZN multiplicetur, & factum per 3. dividatur. Quotus erit soliditas quæsita. Ut si superficies
Fig. 7. Tab. 9. polyedri ACE fuerit $= mn$, & catetus ZN $= d$, soliditas ipsius polyedri erit $\frac{mnd}{3}$:

De-

Demonstratio.

Quantitas enim $\frac{mnd}{3}$ est valor prismatis, cui polyedrum ipsum est æquale (§. 99.).

THEOREMA XXII.

Sphæra est æqualis cono recto, cujus basis adæquat integram superficiem sphæræ, altitudo vero, sive axis sit ejusdem sphæræ radius.

103. Sit sphæra ABEC, atque conus rectus KDM, cujus basis KLM sit æqualis integræ superficiei ipsius sphæræ ABEC, altitudo vero, sive axis DE sit ipsius sphæræ radius. Dico, sphæram ABEC esse æqualem cono KDM.

Demonstratio.

Soliditas sphæræ ABEC consurgit ex tot sphæricis superficiebus sibi concentricis, quot puncta, centro excepto, sunt in radio DE (*Lib. XI.* §. 48.). Soliditas vero coni KDM componitur ex tot circulis baseos circulo KLM parallelis, quot puncta in axe, sive in eodem radio DE numerantur (§. 92.). Fig. 16. Tab. 12. Ergo tot sunt elementa sphæræ ABEC, quot sunt elementa coni KDM. Elementa autem sphæræ ABEC sunt æqualia elementis coni KDM, alterum alteri, quæ nimirum sunt in eadem distantia a centro, seu vertice D. Spectetur namque sphærica elementaris superficies NFP, & circulus elementaris GEH. Cum igitur sphærica superficies ABEC sit ad superficiem sphæricam NFP (*Lib. XIII.* §. 122.), & circulus KLM ad circulum GEH, in ratione *duplicata* radii DE ad radium DF (*Lib. XI.* §. 101.) sphærica superficies ABEC erit ad sphæricam superficiem NFP, ut circulus KLM ad circulum GH (*Lib. I.* §. 76.). Posuimus autem, superficiem sphæricam ABEC æqualem esse circulo KLM. Ergo sphærica quoque superficies NFP æqualis erit circulo GEH (*Lib. I.* §. 128.). Eodem modo ostendam, quamlibet superficiem sphæricam constituentem soliditatem sphæræ ABEC æqualem esse circulo constituenti soliditatem coni KDM, si utrumque elementum in eadem a centro D distantia sumatur. Elementa igitur sphæræ ABEC sunt magnitudine æqualia elementis coni KDM. Demonstravimus autem, ea esse etiam numero æqualia. Ergo sphæra ABEC adæquat conum KDM (*Lib. IX.* §. 53.); ac proinde sphæra &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Sphæra est æqualis cono recto, cujus circulus baseos descriptus sit ex diametro sphæræ, veluti radio, axis vero sit ejusdem sphæræ radius.

Tab. 12. Fig. 16. 104. Sphæra nimirum ABEC æquabit conum rectum KDM, cujus axis est ipsiusmet sphæræ radius DE, si radius circuli baseos KLM fuerit diametro ipsius sphæræ æqualis. Hoc enim ipso basis ipsius coni superficiem sphæræ adæquat (§. 73.).

COROLLARIUM II.

Sphæra est æqualis cono recto, cujus basis sit maximus ipsius sphæræ circulus, axis vero sit duplo major diametro ipsius sphæræ.

105. Ut si basis coni recti fuerit æqualis circulo maximo sphæræ ABEC, & illius axis fuerit duplo major diametro ipsius sphæræ, atque adeo quadruplus radii DE ejusdem, conus iste sphæram ipsam æquabit. Enimvero hujusmodi conus adæquat conum KDML (*Lib. XIII.* §. 63.), cui sphæra ipsa ABEC est æqualis, quatenus nempe horum conorum bases sunt hoc ipso in ratione *reciproca* altitudinum. Circulus namque sphæræ maximus est in ratione *subquadrupla* ad circulum baseos KLM coni KDML (*Lib. IX* §. 185.), quemadmodum axis DE ipsius coni KDML est in ratione *subquadrupla* ad axim, qui sit duplo major diametro ipsius sphæræ ABEC.

COROLLARIUM III.

Sphæra est æquali cylindro recto, cujus baseos radius sit ipsius sphæræ diameter, axis vero, sive latus, seu altitudo sit tertia pars radii ejusdem sphæræ.

106. Hujusmodi namque cylindro æqualis est conus rectus, cujus baseos radius sit diameter sphæræ, altitudo vero, sive axis sit ejusdem sphæræ radius (§. 94.). Hunc autem conum rectum adæquat ipsa sphæra (§. 104.). Ergo illi quoque cylindro ipsa eadem sphæra æqualis erit (*Syn. Algeb.* §. 261). Hinc

COROLLARIUM IV.

Sphæra est æqualis cylindro recto, cujus baseos circulus adæquet superficiem ipsius sphæræ, axis vero, sive altitudo sit tertia pars radii ejusdem sphæræ.

107. Quandoquidem hujusmodi cylindrus non est diversus a cylindro

recto,

recto, cujus baseos radius sit sphæræ diameter ; cum circulus, cujus radius sit sphæræ diameter, superficiem ipsius sphæræ adæquet (§. 73.).

COROLLARIUM V.

Sphæra est æqualis cylindro recto, cujus basis sit maximus ipsius sphæræ circulus, axis vero, sive altitudo quatuor trientes radii, seu duas tertias partes diametri ipsius sphæræ contineat.

108. Videlicet sphæra ABCD adæquat cylindrum rectum DBLM, cujus basis LM sit maximus ipsius sphæræ circulus, axis vero, sive altitudo EC quatuor trientes radii XC, sive duas tertias partes diametri AC comprehendat. Constituto namque cono recto KHEG, cujus basis EG sit circulus descriptus ex diametro AC ipsius sphæræ, axis vero *aC* sit tertia pars radii XC, sive quarta pars axis EC cylindri BLMD, quoniam basis cylindri HEGK quadrupla est basis cylindri BLMD, duo cylindri BLMD, HEGK, utpote reciprocantes sibi mutuo bases, & altitudines, erunt inter se æquales (*Lib.* XIII. §. 62). Sphæra autem ABCD adæquat cylindrum HLGK (§. 106.). Ergo cylindrum quoque æquabit BLMD. Fig. 17. Tab. 12.

PROBLEMA XVI.

Sphæræ soliditatem dimetiri.

109. Esto sphæra ABCD, cujus soliditatem dimetiri oporteat.

Resolutio I.

Inveniatur area circuli ex sphæræ diametro AC, veluti ex radio, descripti (*Lib.* X. §. 28.), atque hujusmodi valor per tertiam radii XC ipsius sphæræ partem multiplicetur. Factum erit soliditas sphæræ quæsita. Ut si area circuli descripti ex sphæræ diametro AC fuerit $= ab$, & radius XC fuerit $= d$, soliditas sphæræ ABCD erit $= \frac{abd}{3}$. Fig. 17. Tab. 12.

Demonstratio.

Etenim factum $\frac{abd}{3}$ exprimit valorem cylindri recti, cujus basis est circulus ex sphæræ diametro AC descriptus, altitudo vero, sive axis est tertia pars radii XC. Hujusmodi autem cylindro æqualis est sphæra (§.).

Ergo factum $\frac{abd}{3}$ soliditatem quoque ipsius sphæræ determinabit.

Resolutio II.

Inveniatur area circuli in ipsa sphæra maximi, ejusque valor per duas tertias partes diametri AC multiplicetur. Quod enim hinc emergit productum, erit soliditas ipsius sphæræ ABCD. Ut si valor maximi in ipsa sphæra circuli fuerit $= mn$, & duæ tertiæ partes diametri AC fuerint $= r$, soliditas sphæræ ABCD erit mnr.

Demonstratio.

Factum quippe mnr exprimit valorem cylindri recti, cui ipsa sphæra est æqualis (§. 108.)

THEOREMA XXIII.

Si eidem sphæræ conus æquilaterus, & cylindrus circumscripti habeantur, conus erit ad cylindrum quoad soliditatem in ratione sesquialtera, sicuti etiam cylindrus ad sphæram.

Sphæræ MEN circumscripti habeantur conus æquilaterus ABC, & cylindrus FHKG.

I.

110. Dico primo, cylindrum FHKG esse ad sphæram MEN in ratione
Fig. 18 Tab. 12. *sesquialtera*.

Demonstratio.

Etenim cylindrus FHKG est ad cylindrum PHKR, cujus eadem sit basis, nempe maximus inscriptæ sphæræ circulus HK, altitudo vero, sive axis bE duas tertias partes contineat axis dE, sive diametri ejusdem sphæræ, ut axis dE ad axim bE (*Lib. XIII.* §49.), nimirum ut 3 ad 2. Cylindro autem PHKR æqualis est sphæra MEN (§. 108.). Ergo cylindrus FHKG erit quoque ad inscriptam sibi sphæram MEN, est 3 ad 2, videlicet in ratione *sesquialtera*.

II.

111. Dico 2, conum ABC esse ad cylindrum FHKG in eadem quoque ratione *sesquialtera*.

De-

Demonstratio.

Diametro BC baseos coni hinc inde in directum producta, ponatur tam recta ES, quam recta ET æqualis axi, sive diametro dE sphæræ inscriptæ, atque a centro a ducantur rectæ aS, aB. aC, aT, quæ spectentur veluti latera conorum rectorum SaT, BaC habentium pro axe radium sphæræ aE. Quoniam itaque, ut superiori loco demonstravimus, nimirum §. 69., propter similitudinem triangulorum AEB, BEa, latus AE est ad latus EB, ut est EB ad latus, sive ad sphæræ radium aE, latus AE erit ad latus, sive ad radium aE, ut est quadratum ipsius AE ad quadratum mediæ proportionalis EB (*Lib. IX.* §. 183.). Loco autem citato ostensum quoque est, quadratum lateris AE esse triplum quadrati lateris EB. Ergo recta, sive axis AE coni erit tripla radii aE; ac proinde conus BAC ad conum BaC ejusdem basi erit, ut 3 ad 1, sive ut 9 ad 3 (*Lib.* XIII. §. 50.), & recta aA = Ed, adeoque etiam aB = dE (*Syn. Alg.* §. 261.) propterea quod sit aB = aA (*Lib. IX* §. 19.), ac demum ES = aB (*Syn. Alg.* §. 261.) cum posita fuerit ES = Ed, sitque Ed = aB. Demonstravimus porro eodem loco, quadratum lateris aE triplum esse quadrati lateris Ea. Ergo, cum quadratum lateris aB sit æquale quadratis laterum BE, Ea simul sumtis (*Lib.* VI. §. 37.), quadratum lateris Ba, adeoque etiam lateris SE, erit ad quadratum lateris BE, ut 4 ad 3. Quamobrem circulus quoque ex radio ES erit ad circulum ex radio EB, ut 4 ad 3 (*Lib. IX.* §. 188.). Constat porro, conum SaT esse ad conum BaC ejusdem axis, sive altitudinis aE, ut circulus ex radio ES ad circulum ex radio EB (*Lib.* XIII. §. 44.). Ergo conus SaT erit ad conum BaC, ut ad 4 ad 3. Cono autem SaT æqualis est sphæra MEN (§. 104.). Igitur sphæra MEN erit ad conum BaC, ut 4 ad 3, & quoniam cylindrus FHKG, ut supra demonstravimus, est ad sphæram MEN, ut 6 ad 4, cilindrus FHKG erit ad conum BaC, ut 6 ad 3: atque adeo conus BAC ad cylindrum FHKG, ut 9 ad 6; cum scilicet ostensum fuerit, conum BAC esse ad conum BaC, ut 9 ad 3. Conus itaque BAC est ad cylindrum FHKG in ratione *sesquialtera*. Ergo, si eidem sphæræ &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

112. Quoniam, ut superiori loco, nimirum §. §. 79, 80. ostensum est, si sphæræ circumscribatur conus æquilaterus, & cylindrus, tota superficies coni est ad totam superficiem cylindri, & hæc ad superficiem inscriptæ sibi sphæræ in ratione *sesquialtera*, manifestum est, *tria hujusmodi corpora esse in continua ratione sesquialtera tam penes integras eorum superficies, quam penes soliditatem spectata*.

SCHO-

SCHOLION.

113. Dissimulandum non est, Archimedem hoc theorema, quod primus omnium invenit, tanti fecisse, ut sphæram cylindo inscriptam suo tumulo apponi jusserit.

COROLLARIUM II.

Sphæra est dupla coni recti, cujus basis sit maximus ipsius sphæræ circulus, axis vero ejusdem sphæræ diameter.

Fig.17. Tab.12. 114. Videlicet sphæra ABCD est dupla coni recti LAM habentis pro basi LM maximum ipsius sphæræ circulum, pro axe vero ejusdem sphæra diametrum AC. Quandoquidem cylindrus NLMP ipsi sphæræ circumscriptus est ad ipsam sphæram, ut 3 ad 2 (§. 110.). Est autem ad conum LAM, ut 3 ad 1 (*Lib.* XIII. §. 31.). Ergo sphæra ABCD erit ad conum LAM, ut 2 ad 1, scilicet in ratione *dupla*.

COROLLARIUM III.

Hemisphærium est duplum coni eandem cum illo habentis basim, & altitudinem.

115. Sequitur manifeste ex præcedenti Ut enim hemisphærium est pars dimidia integræ sphæræ, ita conus, cujus basis eadem sit cum basi hemisphærii, nempe maximus sphæræ circulus, altitudo vero ejusdem sphæræ radius, est in ratione *subdupla* ad conum, qui circulum itidem sphæræ maximum pro basi habeat, diametrum vero ejusdem sphæræ pro altitudine; cum coni æqualium basium sint directe inter se, ut altitudines (*Lib.XIII.* §.50.).

THEOREMA XXIV.

Sector sphæricus est æqualis cono recto, cujus basis adæquat curvam ipsius sectoris superficiem, axis vero sphæræ radium.

116. Esto sector sphæricus BACD genitus ex revolutione sectoris circularis BAD circa axem, sive radium AD. Ponatur autem conus rectus EDF, cujus basis EF sit circulus æqualis curvæ superficiei BAC ipsius sectoris sphærici, axis vero AD sit sphæræ radius. Dico, sectorem sphæricum BACD esse æqualem cono EDF.

De-

Demonstratio.

Coincidit cum demonstratione theorematis XXI. Etenim elementa sectoris sphærici BACD sunt numero, & magnitudine æqualia elementis coni EDF. Sunt enim numero æqualia; quia tot portiones circulares sphæricarum superficierum sibi mutuo concentricarum BAC, *rnf*, *ebd*, *gxz* productæ ex revolutione similium arcuum BA, *rn*, *eb*, *gx* sectoris generatoris BAD, constituunt soliditatem sectoris sphærici BACD, quot circuli sibi mutuo paralleli EF, *pq*, *am*, *st*, geniti ex revolutione rectarum parallelarum EA, *pn*, *ab*, *sx* constituentium triangulum rectangulum EAD, ex quo circa axim AD revoluto gignitur conus EDF, constituunt soliditatem ipsius coni EDF; cum hujusmodi elementa tot utrobique sint, quot puncta in radio AD numerantur. Sunt etiam magnitudine æqualia, alterum alteri, videlicet curva superficies *rnf* circulo *pq*, superficies curva *ebd* circulo *am*, atque ita deinceps. Ut enim circulus EF ad circulum *pq*, ita curva superficies BAC ad curvam superficiem *rnf*; cum tam circulus EF sit ad circulum *pq* (*Lib.* IX. §. 188.), quam curva superficies BAC ad superficiem *rnf* in ratione *duplicata* radii AD ad radium *nD* (*Lib.* XIII. §. 122.). Positus est autem circulus EF æqualis curvæ superficiei BAC. Ergo circulus quoque *pq* curvam superficiem *rnf* æquabit (*Lib.* I. §. 128.). Eodem modo circulus *am* ostendetur æqualis curvæ superficiei *ebd*, & circulus *st* curvæ superficiei *gxz*. Ergo sector sphæricus BACD adæquat conum rectum EDF (*Lib.* IX §. 53.); ac proinde sector sphæricus &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Sector sphæricus est æqualis cono recto, cujus axis adæquat radium sphæræ, radius vero baseos est æqualis chordæ arcus sectoris genitoris circuli.

117. Sector nimirum sphæricus BACD æquabit conum rectum EDF, si hujus axis AD fuerit sphæræ radius, semidiameter vero AE baseos EF Tab. 12.
fuerit æqualis chordæ AB arcus AB sectoris circularis BAD, ex quo circa Fig. 16.
axim, sive radium AD revoluto, sector ipse sphæricus producitur. Si namque radius AE fuerit æqualis chordæ arcus AB, circulus baseos coni EDF erit æqualis curvæ superficiei BAC sectoris BACD (§. 84.); adeoque sector ipse sphæricus conum EDF æquabit (§. 116.).

COROLLARIUM II.

Sector sphæricus est æqualis cylindro recto, cujus baseos radius est æqualis chordæ arcus sectori circuli genitoris, axis vero adæquat tertiam partem radii ipsius sectoris.

118. Videlicet sector sphæricus BACD erit æqualis cylindro recto; cujus baseos radius adæquat chordam arcus AB sectoris circuli genitoris BAD, axis vero tertiam partem radii AD. Huic namque cylindro æqualis est conus EDF (§. 94.), quem sector ipse sphæricus BACD adequat (§. 117.).

PROBLEMA XVII.

Soliditatem sectoris sphærici dimetiri.

119. Esto sector sphæricus ADCB, cujus soliditatem dimetiri oporteat.

Resolutio.

Determinato sectore ADB circuli, ex cujus revolutione circa radium
Fig. 20. DB sector ipse sphæricus producitur, inveniatur valor circuli, cujus radius
Tab. 12. sit chorda arcus AD (*Lib. X.* §. 52.), atque hujusmodi valor per tertiam partem radii DB multiplicetur. Factum erit soliditas sectoris sphærici ADCB quæsita. Si nimirum valor circuli, cujus radius sit corda arcus AD, fuerit $= ab$, & tertia pars radii DB fuerit $= d$, soliditas sectoris ADCB erit $= abd$.

Demonstratio.

Factum quippe abd exprimit valorem cylindri recti, cui sector ADCB est æqualis (§. 118.).

PROBLEMA XVIII.

Segmenti sphærici quantitatem determinare.

I.

120. Dimetiri oporteat segmentum sphæricum ACD minus hemisphærio.

Resolutio.

Inveniatur valor sectoris sphærici ABCD, qui curva dati segmenti superficies